

ВІДА МАТЕМАТИКА

О.В.Чалий
Н.В.Стучинська
А.В.Меленєвська

*Рекомендовано Центральним методичним кабінетом
з вищої медичної освіти МОЗ України як навчальний
посібник для студентів вищих медичних і фармацевтичних
навчальних закладів III–IV рівнів акредитації*

КИЇВ
«ТЕХНІКА»
2001

ПЕРЕДМОВА

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий (Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова),
д-р медичних наук, проф. О. П. Мінцер (Київська медична академія післядипломної освіти ім. П. Л. Шупика).

Чалий О. В., Стучинська Н. В., Меленевська. А. В.

Ч16 Вища математика: Навч. посібник для студ. мед. та фарм. навч. закладів. – К.: Техніка, 2001. – 204 с.: іл.

ISBN 966-575-144-1

Зміст підручника відповідає програмі курсу “Вища математика” для студентів медичних, медико-профілактичних та фармацевтичних факультетів вищих медичних навчальних закладів III та IV рівнів акредитації і містить відомості з математичного аналізу, теорії ймовірностей і математичної статистики.

Викладення матеріалу ілюструється розв’язком прикладних задач фармації, біофізики, медицини та біології. Наводяться задачі для самостійного розв’язування.

Книга буде корисною також для працівників медичних установ та закладів, наукових працівників, студентів природничих факультетів вищих навчальних закладів.

Ч 1602010000 - 025 Замов.
202 - 2001

ББК 22.1:51.1я75

ISBN 966-575-144-1

© Чалий О. В., Стучинська Н. В., Меленевська А. В., 2001

Даний підручник написаний відповідно до чинної програми з вищої математики для вищих медичних навчальних закладів освіти. Автори виходили з того, що основною метою вивчення вищої математики у медичному вузі насамперед є:

- забезпечення системою математичних знань, навичок та умінь, потрібних у трудовій діяльності за обраним фахом;
- закладення основ, достатніх для вивчення інших дисциплін (біофізики, біохімії, нормальній та патологічній фізіології, рентгенології, епідеміології, технології виготовлення лікарських препаратів тощо);
- розумовий розвиток особистості, розвиток логічного мислення та інтуїції, алгоритмічної та інформаційної культури;
- формування наукового світогляду;
- формування уявлень про ідеї і методи математики, навичок математичного моделювання при дослідженні різноманітних природних явищ.

Під час вивчення курсу вищої математики студенти вчаться аналізувати, формулювати й розв’язувати задачі фармацевтичного та медико-біологічного змісту, самостійно користуватися відповідною математичною літературою, організовувати експеримент, відбирати інформацію, обробляти отримані результати, визначати умови оптимізації процесів, оцінювати вплив певних факторів на результати дослідження.

Підручник містить відомості з математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики. У кожному розділі наведено приклади розв’язування задач та завдання для самостійної роботи. Поряд із викладенням програмного матеріалу розкрито перспективи розвитку науки, розглянуто задачі, зорієнтовані на застосування в практичній роботі фахівця.

Автори виходили з того, що підручник є головним дидактичним засобом і покликаний забезпечити оптимальні умови для оволодіння студентами з достатньою повнотою даною навчальною дисципліною. Успіх самостійної роботи студентів із підручником значною мірою залежить від доступності подання матеріалу, тому у книзі практично відсутні громіздкі доведення та викладки. Враховуючи, що значна кількість аудиторії має чималу перерву у навчанні і суттєві вади у вивчені шкільного курсу математики та фізики, першочергового значення надано наочності викладу та природності введення нових понять. Кожне нове поняття, яке пропонується, проілюстроване прикладами.

У деяких випадках автори, використовуючи різні підходи, наводять декілька альтернативних означень одного і того ж математичного поняття (означення границі функції, неперервності, класичне та статистичне означення ймовірностей тощо). Витрати часу на такий підхід можуть здатися невіправданими. Проте практика показує, що відсутність у шкільній програмі розділу про границю функції є причиною труднощів при засвоєнні поняття похідної та інтегралу. Поняття границі є одним з найважливіших у математичному аналізі, завдяки йому здійснюється перехід від скінченного до нескінченного, від дискретного до неперервного. Засвоєння цього поняття вимагає високого рівня абстрактно-теоретичного мислення, тому воно є одним із найскладніших для сприйняття.

Подання матеріалу є в основному традиційним, хоча в деяких розділах (наприклад, похідна та диференціал) використано метод паралельного викладу, при якому основні поняття та теореми формулюються одночасно для похідних і для диференціалів. При створенні підручника автори прагнули до такої моделі, яка б задоволяла потреби студентів як із переважно дедуктивним, так і індуктивним типом мислення і надавала кожному право вибору найбільш прийнятної для нього форми вивчення матеріалу з урахуванням власних психологічних особливостей.

При визначенні обсягу підручника враховувалось те, що попри невпинне зростання обсягу інформації з даної дисципліни кількість годин навчального плану залишається незмінною. Тому при відборі інформації перевага надавалась тій, яка сприяє формуванню особистості спеціаліста та дозволяє науково обґрунтовано розв'язувати медико-біологічні задачі.

Роботу над підручником було розподілено між авторами таким чином: розділи 1, 5, 6, 8 написано Стучинською Н. В., розділи 2–4 – Чалим О. В., Стучинською Н. В., Меленевською А. В., розділи 7, 9, 10 – Чалим О. В., Стучинською Н. В.

Щира вдячність ректору Національного медичного університету ім. О. О. Богомольця, академіку Гончаруку Є. Г., проректору Широбокову В. П. за підтримку і допомогу, колективу кафедри медичної та біологічної фізики, рецензентам. Особлива вдячність найприскіпливішим критикам та найуважнішим читачам – студентам першого випуску фармацевтичного факультету Національного медичного університету ім. О. О. Богомольця.

1.1. ПОНЯТТЯ ПРО МНОЖИНУ. ЧИСЛОВІ МНОЖИНЫ

Поняття множини – одне з основних (тобто тих, яким не дають означення) понять математики. Засновник теорії множин німецький математик Г. Кантор стверджував, що множина – це багато чого, мислимого нами як єдине. Описово термін **множина** пояснюється як сукупність, колекція, набір деяких об'єктів довільної природи, що об'єднані за якоюсь спільною для них ознакою. Об'єкти, з яких складається множина, називають її **елементами** (точками). Ознака, яку мають всі елементи даної множини і тільки вони, називається **характеристичною властивістю** елементів множини. Символічний запис $a \in A$ означає належність елемента a до множини A . Якщо множина B вміщує елементи x_1, x_2, \dots, x_n , то це записують так: $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Запис $a \notin A$ означає, що елемент a не належить до множини A . Символом \emptyset позначають пусту множину. Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B , то кажуть, що A є підмножиною B і позначають $A \subset B$. Очевидно, що пуста множина є підмножиною будь-якої множини.

Операції над множинами. *Об'єднанням* множин A та B називають таку множину C , яка складається з усіх тих елементів, що належать хоча б до однієї з множин A або B (рис. 1.1), і позначають

$$C = A \cup B.$$

Математику вже тому треба вчити, що вона розум до ладу приводить.

М. Ломоносов

Властивості об'єднання.

- | | |
|---|--|
| 1. $A \cup A = A$. | 2. $A \cup \emptyset = A$. |
| 3. $A \cup B = B \cup A$. | 4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. |
| 5. Якщо $B \subset A$, то $A \cup B = A$. | |

Перетином множин A та B називають таку множину C , що складається з усіх тих елементів, які належать і множині A , і множині B (рис. 1.2). Позначають

$$C = A \cap B.$$

Властивості перетину.

- | | |
|---|---|
| 1. $A \cap A = A$. | 2. $A \cap \emptyset = \emptyset$. |
| 3. $A \cap B = B \cap A$. | 4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. |
| 5. Якщо $A \subset B$, то $A \cap B = A$. | 6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. |
| 7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. | |

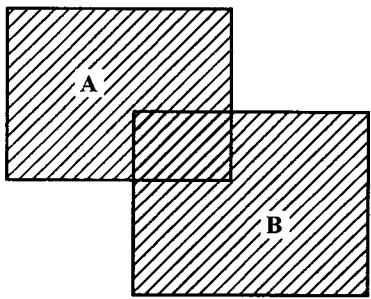


Рис. 1.1

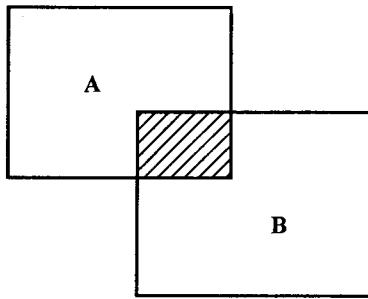


Рис. 1.2

Приклад. У зимову сесію студенти першого курсу складають лише два іспити: з біофізики та біології. Множину всіх студентів першого курсу позначимо C ; множину студентів, які не склали іспит з біології A , з біофізики – B . Очевидно, що $A \subset C$, а також $B \subset C$. Сукупністю студентів, які мають академзаборгованість, є об'єднання множин A та B ($A \cup B$). Перетином цих множин ($A \cap B$) є множина студентів, які не склали жодного іспиту в зимовій сесії.

Відображення є одним з фундаментальних понять математики. Нехай A та B дві непусті множини. Якщо кожному елементу $x \in A$ ставиться у відповідність за певним правилом один цілком певний елемент $y \in B$, то говорять, що задано *відображення* f множини A в множину B .

Ніхто не знає, на що він здатен, поки не спробує

Публілій Сірус

Позначають $f: A \rightarrow B$. При цьому y називають *образом* елемента x , а x – *прообразом* елемента y .

Відображення, яке має властивості: 1) різним прообразам відповідають різні образи $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$; 2) кожен елемент множини B є образом якогось елемента множини A , встановлює *взаємно однозначну відповідність* між множинами A та B , тобто таку відповідність, при якій кожному елементу множини A відповідає один єдиний елемент множини B і кожний елемент множини B є образом деякого елемента множини A . Наприклад, взаємно однозначною є відповідність студентів та їхніх залікових книжок.

Наши першій обов'язок в цьому світі полягає в тому, щоб облаштовувати освіріці порядку і системи.

Н. Вінер

різним елементам множини A відповідає один і той самий елемент множини B (прикладом такого випадку є постійна функція).

Потужністю скінченної множини називається число, рівне кількості її елементів. Дві нескінчені множини A та B вважаються *рівнопотужними* (еквівалентними), якщо між ними можна встановити взаємно однозначну

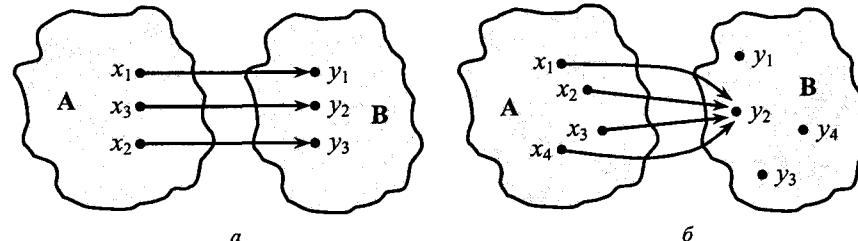


Рис. 1.3

відповідність. Розглянемо поняття потужності на прикладах числових множин.

Числові множини. Множина, елементами якої є числа або проміжки числової осі, називається *числовою множиною*.

Будь-яку нескінченну множину, яка еквівалентна множині натуральних чисел

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\},$$

називають *зліченою*. Із всякої нескінченної множини можна виділити зліченну підмножину.

Множини цілих чисел

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$$

та раціональних чисел

$$Q = \left\{ \frac{p}{q}, \text{ де } p \in Z, q \in N \right\}$$

– зліченні. Множина дійсних чисел R (раціональних і ірраціональних) – *незлічена*. Множина R має важливу властивість неперервності. Ця властивість постулює можливість взаємно однозначної відповідності між множиною дійсних чисел та множиною точок на прямій лінії. Всяку нескінченну множину, яка еквівалентна множині дійсних чисел, називають *множиною потужності континууму*. Наприклад, такою множиною є будь-який числовий інтервал $(a; b)$ або відрізок $[a; b]$, $a \neq b$, числової осі.

Має місце таке послідовне включення:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Всі вказані числові множини мають властивість впорядкованості, тобто для будь-яких двох різних елементів a та b будь-якої з даних множин можна сказати, що $a > b$ або $a < b$.

Вимірювальне вимірювання і робіть недоступне вимірювання доступним.

Галілео Галілей

Множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел. Введемо поняття уявної одиниці i , яке вперше запровадив К. Ф. Гаусс. Її визначають як число, квадрат якого дорівнює (-1) . Таким чином

$$i = \sqrt{-1}. \quad (1.1)$$

Це дозволяє добувати корені з від'ємних чисел. Наприклад,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \pm i \cdot 2 = \pm 2i.$$

Комплексними називаються числа, які можна подати у вигляді:

$$z = \alpha + \beta i, \quad (1.2)$$

де α та β – дійсні числа, при цьому α називають дійсною частиною комплексного числа z , βi – його уявною частиною. Таку форму запису комплексних чисел називають *алгебраїчною*. Всяке комплексне число зручно зображувати точкою на площині, яка має координати α та β (рис. 1.4). Оси Ox та Oy прямокутної декартової системи координат називають при цьому відповідно дійсною та уявною віссю. Довжину ρ радіус-вектора точки $Z(\alpha, \beta)$ називають модулем комплексного числа z і позначають $|z|$. Мають місце співвідношення

$$\alpha = \rho \cos \varphi, \beta = \rho \sin \varphi.$$

Тоді

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.3)$$

Таку форму запису комплексного числа називають *тригонометричною*.

Часто користуються *показниковою* формою запису комплексного числа

$$z = \alpha + \beta i = \rho e^{i\varphi}. \quad (1.4)$$

Перехід від (1.3) до (1.4) здійснений на основі *формули Ейлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1.5)$$

Строге доведення формул (1.5) потребує більш серйозного знайомства з основами математичного аналізу і тут не наводиться. Показниковою формою зручно користуватися при піднесененні до степеня. Так, наприклад:

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

або в тригонометричній формі

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.6)$$

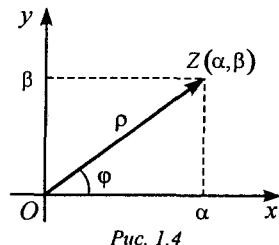


Рис. 1.4

З порівняння формул (1.3) та (1.6) випливає *формула Муавра*:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (1.7)$$

Для множення комплексних чисел найзручнішою є тригонометрична форма. Так, наприклад, якщо

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

а

$$z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

то

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] = \\ = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Отже, при множенні двох комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, їх модулі перемножаються, а аргументи додаються.

Додавання і віднімання комплексних чисел зручно виконувати, якщо вони задані в алгебраїчній формі:

$$z_1 \pm z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i) \pm (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 \pm \alpha_2) + (\beta_1 \pm \beta_2) i.$$

Основні закони дій над дійсними числами (переставний, сполучний і розподільний) виконуються і для комплексних.

Два комплексні числа z і z' називаються *взаємно спряженими*, якщо вони мають рівні дійсні частини, а їхні уявні частини відрізняються лише знаком:

$$z = \alpha + \beta i = \rho e^{i\varphi} = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

$$z' = \alpha - \beta i = \rho e^{-i\varphi} = \rho (\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Множина комплексних чисел невпорядкована, тобто з двох різних комплексних чисел не можна вказати більше.

1.2. ПОНЯТТЯ ПРО ФУНКЦІЮ. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

Якщо кожному значенню змінної величини x , яка належить до деякої числової множини, ставиться у відповідність одне і тільки одне значення величини y , то y називається *функцією* від x ; x називається *аргументом*, або *незалежною змінною*.

Іншими словами, функцією називають відображення, задане на числових множинах. За відсутності спеціальних вказівок надалі розглядаємо функції, задані на множині дійсних чисел. Для функцій використовують позначення $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = u(x)$ тощо. Сукупність усіх значень аргументу x , для яких функція $y = f(x)$ визначена, називається *областю визначення* цієї функції, її позначають $D(y)$. Сукупність всіх значень, яких набуває змінна y , називається *областю значень* функції $y = f(x)$, її позначають $E(x)$.

Приклад. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{4 - x^2}$. Остання рівність має зміст, якщо $4 - x^2 \geq 0$. Звідси $x^2 \leq 4$, або $|x| \leq 2$. Отже, областью визначення даної функції є відрізок $[-2; 2]$. Множина значень цієї функції – відрізок $[0; 2]$.

Способи задання функції. *Аналітичний спосіб* – це задання функції за допомогою формул або декількох формул. Наприклад, $y = x^2$, $y = 3x$, $y = \lg x$, $y = \sin x$. Зауважимо, що при аналітичному способі задання є випадки, коли функція задана не однією, а кількома формулами, наприклад:

$$y = \begin{cases} \lg x & \text{при } x > 0; \\ x^3 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Якщо рівняння, яким задається функція, не розв'язане відносно залежної змінної, то говорять, що функція задана неявно. Наприклад,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

В багатьох випадках неявно задана функція може бути приведена до явного вигляду.

Якщо функціональна залежність між змінними x і y виражена через третю змінну t , яку називають параметром, тобто

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

то кажуть, що функція $y(x)$ задана *параметрично*. Наприклад, параметричні рівняння півеліпса з півосями a і b мають вигляд

$$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Табличний спосіб – це спосіб задання функції за допомогою таблиці. Широко використовується в різного роду експериментальних дослідженнях і спостереженнях. При цьому задають сукупність значень незалежної змінної, а значення функції знаходять дослідним шляхом.

Графічний спосіб – це спосіб задання функції за допомогою графіка. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок (x, y) площини xy , координати яких зв'язані співвідношенням $y = f(x)$. Діапазон застосування графічного способу на практиці дуже різноманітний. Цим способом широко користуються при дослідженнях, пов'язаних із застосуванням самописних приладів, у тому числі в медичних дослідженнях (електрокардіографія, реографія).

Існують також функції, які задають словесно або деяким умовним позначенням. Наприклад, часто використовують запис $y = E(x)$, де E – початкова літера французького слова entier (цілий). Під $E(x)$ розуміють найбільше ціле число, яке не перевищує значення аргументу. Наприклад: $E(0,2) = 0$, $E(2,7) = 2$, $E(-2) = -2$, $E(-\pi) = -4$ тощо. Функція $E(x)$ визначена на всій числовій осі, її графік подано в п. 1.6 на рис. 1.10.

Аналітичний спосіб задання вважають досконалішим за інші, оскільки в цьому випадку застосовні методи математичного аналізу, які дозволяють повністю дослідити функцію.

Властивості функції. Функція, задана в симетричній області відносно початку координат, називається *парною*, якщо

$$f(x) = f(-x), \quad (1.8)$$

і *непарною*, якщо

$$f(x) = -f(-x). \quad (1.9)$$

Функцію називають монотонно *зростаючою* на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з нерівності $x_2 > x_1$ випливає:

$$f(x_2) > f(x_1). \quad (1.10)$$

Якщо ж із нерівності $x_2 > x_1$ на деякому проміжку випливає, що

$$f(x_2) < f(x_1), \quad (1.11)$$

то на цьому проміжку функція *спадна*. Якщо ж нерівності (1.10) та (1.11) нестрогі, то говорять, що функція *неспадна* за умови

$$f(x_2) \geq f(x_1),$$

і *незростаюча*, якщо

$$f(x_2) \leq f(x_1).$$

Функції всіх цих типів мають спільну назву – *монотонні*. Монотонні функції часто зустрічаються в різних дослідженнях. Наприклад, освітленість – монотонно спадна функція відстані від джерела світла.

Обмежені функції. Функція $f(x)$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує таке число M , що при всіх значеннях аргументу виконується нерівність

$$f(x) \leq M \quad (f(x) \geq M).$$

Ми стільки можемо, скільки знаємо.

Ф. Бекон

Графік обмеженої зверху (знизу) функції розміщується нижче (вище) прямої $y = M$.

Якщо функція обмежена зверху і знизу, то кажуть, що функція обмежена, тобто

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2.$$

Графік обмеженої функції розміщується в смузі між прямими $y = M_1$ та $y = M_2$.

Обернені функції. Якщо рівняння $y = f(x)$ може бути однозначно розв'язаним відносно змінної x або існує функція $x = \varphi(y)$ така, що $y \equiv f(g(y))$, то функція $x = g(y)$ називається *оберненою* до $y = f(x)$. Іншими словами, якщо функція $x = \varphi(y)$ обернена до функції $y = f(x)$, то:

область визначення функції f є областю значень функції φ ;

область значень функції f є областю визначення функції φ ;

одному значенню змінної $x \in D(f)$ відповідає одне і тільки одне значення змінної $y \in D(\varphi)$.

Із сказаного випливає, що будь-яку з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ можна назвати прямою або оберненою, тобто вони є взаємно оберненими.

Оскільки переозначення аргументу і функції для взаємно обернених функцій не є істотним, то графік функції $y = f(x)$ і оберненої $x = \varphi(y)$ буде один і той самий. Якщо ж в обернений функції, як і в прямій, позначити аргумент через x , а функцію через y , тобто записати взаємно обернені функції

$$y = f(x) \text{ та } y = \varphi(x),$$

то графіки цих функцій будуть симетричними відносно бісектриси першого і третього координатних кутів, $y = x$.

Основні елементарні функції. Розглядаючи нескінченну множину різноманітних функцій, за основу беруть групу так званих *основних елементарних функцій*.

Степенева функція – це функція виду

$$y = x^\alpha, \quad (1.12)$$

де α – дійсне число. Вона визначена при всіх значеннях x , не рівних нулю. Якщо $\alpha = 1/q$, де q – натуральне число, то степенева функція набуває вигляду:

$$y = \sqrt[q]{x} \quad (1.13)$$

і її називають радикалом. Функція (1.13) визначена при всіх невід'ємних x , якщо q парне, і при всіх x , якщо q непарне. Графіки степеневих функцій для деяких значень α подано на рис. 1.5.

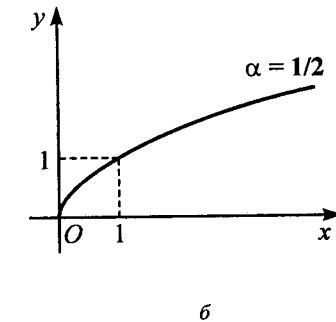
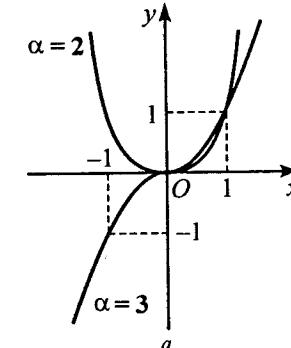


Рис. 1.5

Показниковою називається функція, що має вигляд

$$y = a^x, \quad (1.14)$$

де $a > 0$. Вона визначена при всіх $x \in \mathbb{R}$. Функція $y = a^x$ – строго монотонна. При $0 < a < 1$ вона строго спадає, при $a > 1$ – строго зростає.

В задачах і прикладах часто зустрічається випадок, коли $a = e \approx 2,71828$. Число e , як і π , ірраціональне. Ми визначимо його пізніше. Графік функції $y = e^x$ називають *експонентою*. Графіки показникових функцій для різних значень a ($a > 1$, $0 < a < 1$) подано на рис. 1.6.

Логарифмічна функція – це функція виду

$$y = \log_a x \quad (1.15)$$

за умови, що $a > 0$, $a \neq 1$. Ця функція обернена до показникової. Область визначення цієї функції – множина всіх дійсних додатних чисел ($x \in (0; \infty)$). Графік подано на рис. 1.7.

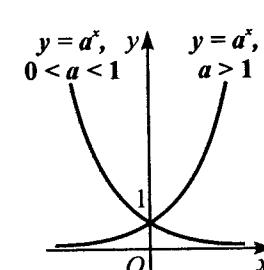


Рис. 1.6

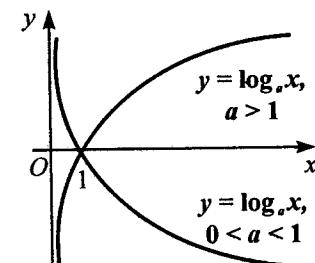


Рис. 1.7

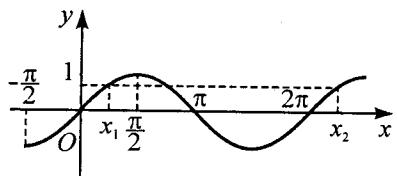


Рис. 1.8

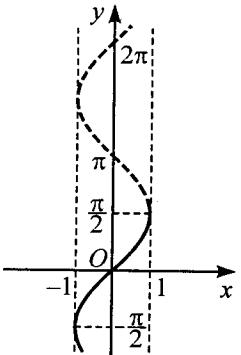


Рис. 1.9

До основних **тригонометрических** відносять функції виду $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$. Всі вони є періодичними, тобто для них існує таке число $T (T \neq 0)$, що виконується рівність

$$f(x+T) = f(x).$$

Число T називають *періодом*. Як приклад розглянемо функцію виду $y = \sin x$. Її період $T = 2\pi$. Область визначення $-(-\infty; \infty)$, множина значень $[-1; 1]$. Графік подано на рис. 1.8.

Оскільки функція $y = \sin x$ періодична, то вона не має оберненої функції. Якщо область визначення функції $y = \sin x$ (рис. 1.8) звузити до відрізка

Май мужність користуватися власним розумом.

I. Кант

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ і розв'язати рівняння $y = \sin x$ відносно x , отримаємо $x = \arcsin y$. Замінивши позначення змінних, матимемо обернену функцію $y = \arcsin x$. На рис. 1.9 графік цієї функції зображене суцільною лінією.

Аналогічно визначають інші обернені тригонометричні функції $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.

Складеною або функцією від функції називається функція, задана ланцюжком рівностей $y = f(u)$, $u = \psi(x)$. При цьому функцію ψ називають внутрішньою, f – зовнішньою. Наприклад, $y = \sin^2 x$; $y = \sin x^2$; $y = \cos 2x$; $y = e^{\cos x^2}$ – складені функції. Внутрішньою для $y = \sin^2 x$ є тригонометрична (синус), а зовнішньою – степенева функція.

Завершуючи розглядання елементарних функцій, вкажемо, що функції, які отримують із основних за допомогою чотирьох арифметичних дій, прийнято називати *елементарними функціями*.

Складені функції, утворені скінченим числом елементарних функцій, також є елементарними.

1.3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОСЛІДОВНОСТІ

Звернемось спочатку до найбільш простого випадку – числових послідовностей. Якщо функція $x_n = f(n)$ визначена на множині натуральних чисел, то її називають **числовою послідовністю**. Величини $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ або $\{x_n\}$ називають членами послідовності, а x_n – загальним членом. Найчастіше числові послідовності задають за допомогою загального члена $\{x_n\}$. Щоб вказати будь-яке значення змінної x достатньо підставити відповідний номер ($n = 1, 2, 3, \dots$) у вираз загального члена послідовності. Наприклад, числовою послідовністю із загальним членом

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} \quad \epsilon: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots; \quad (1.16)$$

$$\left\{ (-1)^n n \right\} \quad - \quad -1, 2, -3, 4, \dots; \quad (1.17)$$

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\} \quad - \quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots; \quad (1.18)$$

$$\left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \quad - \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots. \quad (1.19)$$

Арифметичною прогресією називається послідовність, для всіх членів якої виконується рівність

$$x_n = x_{n-1} + d.$$

Число d називають *різницею* прогресії. Загальний член послідовності має вигляд

$$\{x_n\} = \{x_1 + (n-1)d\}.$$

Геометричною прогресією називається послідовність, для всіх членів якої виконується рівність

$$x_n = x_{n-1} \cdot q.$$

Число q – *знаменник* прогресії. Загальний член геометричної прогресії має вигляд

$$\{x_n\} = \{x_1 \cdot q^{n-1}\}.$$

Границя послідовності. Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$ або символічно $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, якщо для будь-якого наперед заданого додат-

нога числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$, виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Приклад. Розглянемо послідовність (1.16). Доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$.

Припустимо, що ε – довільне додатне число. Тоді $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, якщо $n > \frac{1}{\varepsilon}$. З цього випливає, що за номер N досить взяти цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

Теорема 1. Якщо послідовність має границю, то ця границя єдина.

Доведення. Припустимо, що послідовність має дві границі

$$\lim x_n = a \text{ i } \lim x_n = b, \text{ де } a \neq b.$$

Виберемо $a < b$. Візьмемо довільне $\delta > 0$ таке, щоб $\delta < \frac{b-a}{2}$. Знайдемо числа $N_1(\delta)$ та $N_2(\delta)$, при яких для всіх $n > N_1$ виконується нерівність $|x_n - a| < \delta$, а для всіх $n > N_2$ – $|x_n - b| < \delta$. Якщо вибрати найбільше N з чисел N_1 і N_2 , то для всіх $n > N$ будуть виконуватись нерівності $a - \delta < x_n < a + \delta$ і $b - \delta < x_n < b + \delta$, що неможливо, оскільки $a < b$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх n виконується нерівність

$$|x_n| \leq M.$$

Геометрично це означає, що всі значення послідовності потрапляють до відрізка $[-M; M]$.

Теорема 2. Якщо послідовність має границю, то вона є обмеженою.

Доведення. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Тоді в будь-який δ -окіл точки a потрапляють всі x_n , за винятком хіба лише скінченного числа точок x_n . Нехай, починаючи з $n = N + 1$, всі x_{n+1}, x_{n+2} потрапили до околу $(a - \delta, a + \delta)$. Виберемо з чисел $a - \delta$ та $a + \delta$ найбільше за модулем M_1 . Тоді $|x_n| < M_1$ для всіх $n > N$. Тепер із скінченної множини чисел $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, M_1$ виберемо найбільше число і позначимо його M . Тоді для всіх $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| < M$. Теорему доведено.

У послідовності (1.16) змінна x прямує до своєї границі, весь час залишаючись більшою за неї, у таких випадках кажуть, що послідовність

обмежена знизу. Послідовність (1.18) прямує до одиниці, але вона обмежена зверху, оскільки кожен її член менший за одиницю. Можливий і третій випадок: значення змінної то більші, то менші границі змінної (послідовність (1.19)).

Не варто думати, що всяка обмежена послідовність має границю. Якщо, наприклад, загальний член $x_n = (-1)^n$, то така послідовність не має ніякої границі. Не має границі і послідовність (1.17).

Теорема 3. Якщо для послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, що мають границі a і b , починаючи з деякого номера, для всіх наступних членів виконуються нерівності

$$x_n \geq y_n \text{ або } x_n > y_n,$$

$$\text{то } \lim x_n \geq \lim y_n, \text{ або } a \geq b.$$

Теорема 4 (Гур'єва або про порушника і двох конвоїрів). Якщо з трьох послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ дві мають одну й ту ж саму границю $\lim x_n = \lim z_n = a$ і при всіх n , починаючи з деякого номера, справджаються нерівності

$$x_n < y_n < z_n,$$

$$\text{то } \lim y_n = a.$$

Узагальнюмо означення границі для функції.

Границя функції за Гейне. Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, що має границю a ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), послідовність відповідних значень функції $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ має границею число A ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$).

Ми вважали, що функція визначена в околі точки a , крім, можливо, самої точки a .

Границя функції за Коши. Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці a , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x , які задовільняють умову

$$|x - a| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число δ , яке входить в означення, залежить від вибору ε і, як правило, при зменшенні ε зменшується і δ . При прямуванні значень аргументу до деякої точки ($x \rightarrow a$) значення функції $y = f(x)$ наближаються до числа A , яке і є границею функції.

З тих пір як почалися спроби доводити очевидні твердження, багато з них виявилися хибними.

Б. Рассел

Позначають це таким чином:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Іншими словами, число A є границею функції $y = f(x)$ в точці $x = a$, якщо для всіх x , достатньо близьких до числа a , крім, можливо, самої точки a , відповідні значення функції виявляються як завгодно близькими до числа A (безумовно, це стосується тих точок, в яких функція визначена).

Теорема 5 (про рівносильність означення граници функції за Гейне та Коши). Для того щоб існувала границя за Коши, необхідно і достатньо, щоб існувала границя за Гейне.

Приклад. Довести, що $\lim_{x \rightarrow 2} (7x - 3) = 11$. Виберемо довільне $\epsilon > 0$ і знайдемо відповідно

$\delta(\epsilon) > 0$, щоб для всіх x , які задовільняють нерівність $|x - 2| < \delta$, виконувалось $|y - 11| < \epsilon$, тобто $|7x - 3 - 11| < \epsilon$, або $|x - 2| < \frac{\epsilon}{7}$. Звідси $\delta \leq \frac{\epsilon}{7}$. Згідно з означенням число 11 є границею функції $y = 7x - 3$ при $x \rightarrow 2$.

При вивчені властивостей функцій доводиться розглядати і граници функції при прямуванні аргументу x до нескінченності.

Число A називається **граничою функції $f(x)$ в нескінченності**, якщо для кожного числа $\epsilon > 0$ існує таке додатне число N , що для всіх x , які задовільняють умову $x > N$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \epsilon$.

Позначають це таким чином:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Границя функції при $x \rightarrow -\infty$ визначається аналогічно, тільки умову $x > N$ потрібно замінити на $x < -N$.

Крапля продовбує камінь не силою, а частим падінням. Так і людина стає мудрою не від дворазового, а від багаторазового читання.

Овідій

Зауваження. Якщо функція $y = f(x)$ має своюю границею число A лише при додатковій умові, що x прямує до a , залишаючись більшим за a , то число A називають

односторонньою границею функції $y = f(x)$ праворуч.

Позначають це таким чином:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A.$$

Запис " $x \rightarrow a+0$ " означає, що x прямує до a праворуч, тобто $x > a$. Аналогічно дають означення функції ліворуч. При цьому використовують позначення $x \rightarrow a-0$.

Теорема 6. Для того щоб функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ мала границю, необхідно і достатньо, щоб для неї у точці a існували односторонні (праворуч і ліворуч) граници, кожна з яких дорівнює A , тобто

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

1.4. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ТА НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ

Нескінченно малі та їх властивості. При вивчені властивостей граници особливу роль відіграють функції, границя яких при прямуванні аргументу до певного значення дорівнює нулю.

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \rightarrow a$, якщо

Ignoratio non est argumentum.

Спіноза

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Розглянемо основні властивості нескінченно малих. Ці властивості правильні не тільки для функцій, а й для послідовностей.

1. Якщо функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ нескінченно малі при $x \rightarrow a$, то їхня сума також є нескінченно малою

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \alpha_2(x) = 0.$$

Ця властивість поширюється на випадок суми будь-якого скінченного числа нескінченно малих.

2. Добуток будь-якої обмеженої функції на нескінченно малу $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією.

3. Добуток константи c на нескінченно малу $\alpha(x)$ є нескінченно малою.

4. Добуток двох або більше (але скінченного числа) нескінченно малих функцій є нескінченно малою.

5. Для того щоб число A було границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою, тобто

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad (1.20)$$

де $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Нескінченно велика. Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \rightarrow a$, якщо її абсолютна величина в процесі зміни x стає і залишається більшою будь-якого наперед заданого числа N . У такому випадку пишуть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Якщо $f(x)$ при цьому від'ємна, то пишуть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Варто пам'ятати, що ∞ не число, а символ, який використовують для позначення нескінченно великих.

Існує тісний зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими:

якщо $\alpha(x)$ нескінченно велика, то $y(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ нескінченно мала і, навпаки, якщо $y(x)$ нескінченно мала, то $\alpha(x)$ нескінченно велика.

Приклад. Задана функція $y = \frac{1}{x-4}$, де $x \rightarrow 4$. Тоді $(x-4)$ – нескінченно мала, а обернена до неї величина – нескінченно велика:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-4} = \infty.$$

1.5. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ

Теореми, доведені раніше для послідовностей, справджаються і для функцій. Отже, сформулюємо основні теореми.

1. Функція, що має скінченну границю в точці a , обмежена в околі цієї точки. Таким чином, якщо існує $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то у деякому околі $(a-\delta, a+\delta)$ виконується нерівність $|f(x)| < M$.

2. Якщо функція має границю в деякій точці, то ця границя єдина.

3. Якщо для функцій $f(x), f_1(x)$ та $f_2(x)$ виконується нерівність

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

i при цьому $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A$, *то* $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Ця теорема широко використовується для обчислення ряду границь.

Наприклад, якщо відомо, що $\frac{1}{n} < a_n < \frac{10}{n}$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$, оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{n} = 0$.

4. Границя постійної величини дорівнює самій постійній величині.

Дійсно, якщо всі значення $x = c$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

5. Якщо функції $f(x_1)$ та $f(x_2)$ мають граници при $x \rightarrow a$, то при $x \rightarrow a$ мають граници також їх сума, добуток, частка, причому:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \text{ за умови } \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0.$$

6. Постійний множник можна виносити за знак граници.

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

7. Монотонна функція в кожній точці області визначення має границю.

Приклади.

1. Нехай $y = f(x) = x$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

2. Нехай $y = f(x) = x^n$, де $n \in N$. Тоді, використовуючи 5, маємо

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}} = a^n.$$

3. Нехай функція $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ – многочлен. Використавши 5, 6, а також результати попередніх прикладів, дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} c_0 + c_1 \lim_{x \rightarrow a} x + c_2 \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \dots + c_n \lim_{x \rightarrow a} x^n = c_0 + c_1a + c_2a^2 + \dots + c_na^n.$$

4. Нехай $y = f(x) = \frac{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$ – дробово-раціональна функція. Використовуючи попередні результати, а також припускаючи, що a не є коренем знаменника, матимемо

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} = \frac{c_0 + c_1a + c_2a^2 + \dots + c_na^n}{b_0 + b_1a + b_2a^2 + \dots + b_ma^m}.$$

Чималій інтерес має обчислення границі дробів, чисельник та знаменник яких мають своїми межами нуль або нескінченність. Часто такий дріб вдається тотожно перетворити і спростити, щоб можна було скористатись теоремою 5. Крім вказаних невизначеностей, зустрічаються також невизначеності типу

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

Поки що їх будемо розкривати, користуючись теоремами про границі. Зауважимо, що існує загальний прийом розкриття невизначеностей за правилом Лопітала. З ним ознайомимося в наступному розділі. Звернемося до конкретних прикладів.

Big repeatitа placent.

Приказка

Приклади.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) = 2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+2)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+2} = -\frac{1}{2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+5} = \frac{4}{7}.$$

У багатьох випадках при обчисленні границь корисними є так звані **чудові (важливі) граници**.

Справедлива рівність: границя відношення синуса кута x до самого x за умови, що $x \rightarrow 0$, дорівнює одиниці:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.21)$$

Рівність (1.21) називають *першою чудовою (важливою) границею*.

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin mx}$.

Запишемо цю границю у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n \frac{\sin nx}{nx}}{m \frac{\sin mx}{mx}} = \frac{n}{m} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx} = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{1} = \frac{n}{m}.$$

Розглянемо функцію $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Ця функція є монотонно зростаючою і обмеженою зверху. Її границю при $x \rightarrow \infty$ називають числом e (на честь Леонарда Ейлера):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,71828.... \quad (1.22)$$

Границю (1.22) називають *другою чудовою границею*.

Логарифми, основою яких є число e , називають *натуральними* і позначають $\ln x$.

Встановимо зв'язок між десятковими та натуральними логарифмами. Нехай $\ln a = y$, тоді $e^y = a$. Злогарифмувавши останню рівність за основою 10, дістанемо

$$\lg x = y \lg e = \ln x \cdot \ln e.$$

Звідси

$$y = \ln x = \frac{\lg x}{\lg e}.$$

Тобто

$$\ln x = \frac{1}{\lg e} \lg x.$$

Коефіцієнт переходу від натурального до десяткового логарифма

$$\frac{1}{\lg e} = \frac{1}{0,4342945} \approx 2,3026.$$

Таким чином,

$$\lg x = 0,4343 \ln x;$$

$$\ln x = 2,3026 \lg x.$$

Крім вказаних, до чудових відносять також граници:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Порівняння нескінченно малих. Розглянемо відношення двох нескінченно малих $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, для компактності запису будемо їх позначати α та β . Нехай існує границя цього відношення при $x \rightarrow a$. Тоді можливі три випадки:

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$. В цьому випадку говорять, що α нескінченно мала вищого порядку мализни, ніж β .

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$. В такому випадку величини α та β мають один порядок мализни.

3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$. В такому випадку кажуть, що α має нижчий порядок мализни, ніж β .

Якщо α та β – нескінченно малі величини одного і того ж порядку мализни, причому $A = 1$, то вони називаються *еквівалентними нескінченно малими*. Символічно це записують так: $\alpha \sim \beta$.

Так, наприклад, x та $\sin x$ є еквівалентними нескінченно малими величинами при $x \rightarrow 0$. Легко показати, що x та $\operatorname{tg} x$ також є еквівалентними нескінченно малими:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Необхідна і достатня умова еквівалентності нескінченно малих. Для того щоб дві нескінченно малі функції були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб різниця їх була нескінченно малою більш високого порядку мализни, ніж вони самі.

Теорема. Якщо існує границя відношення двох нескінченно малих α та β , то вона дорівнює границі відношення відповідних їм еквівалентних нескінченно малих.

Доведення. Припустимо, що $\alpha \sim \alpha_1$, а $\beta \sim \beta_1$, тоді, враховуючи рівність $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta}$, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta_1}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Доведена теорема значно спрощує знаходження границь для ряду випадків. Наприклад, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

Наведемо еквівалентні нескінченно малі при $x \rightarrow 0$, які зустрічаються найчастіше:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x.$$

1.6. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Поняття границі дозволяє визначити одну з найважливіших властивостей функції – *неперервність*.

Визначена в точці x_0 та її околі функція $y = f(x)$ називається *неперервною* в цій точці, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1.23)$$

Можна також сформулювати інше рівносильне означення, яке неважко отримати з наведеного.

Справді, якщо рівність (1.23) записати у вигляді $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$, то звідси:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0.$$

Різниця між двома значеннями функції називається приростом функції Δy :

$$\Delta y = f(x) - f(x_0).$$

Отже, функцію $y = f(x)$ називають *неперервною* в точці x , якщо нескінченно малому приrostу аргументу Δx відповідає нескінченно малий приrost функції в даній точці

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0.$$

Таким чином, щоб дослідити функцію на неперервність в довільній точці $x = x_0$, достатньо переконатись, що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Вважаємо за потрібне звернути увагу на малопомітну, але суттєву відмінність, яка міститься в означені границі та неперервності функції. Границя функції при $x \rightarrow a$ може існувати і тоді, коли в самій точці a функція не визначена. Неперервність вимагає визначеності функції в цій точці і виконання рівності $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Приклад. Довести неперервність функції $y = \sin x$ у довільній точці $x_0 \in \mathbb{R}$.
Приrost функції в точці x_0

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0,$$

тоді

$$\Delta y = 2 \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = 2 \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Звідси

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x.$$

Скориставшись першою чудовою границею ($\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$) і обмеженістю функції $\cos x$, матимемо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

Якщо функція неперервна в кожній точці деякого проміжку $(a; b)$, то її називають *неперервною на всьому проміжку* $(a; b)$.

Таким чином, функція $y = \sin x$ неперервна у всій області визначення, оскільки за x_0 ми приймали довільну точку числової прямої.

Основні властивості неперервних на деякому проміжку $(a; b)$ функцій.

1. Якщо неперервна функція $f(x)$ додатна (від'ємна) в деякій точці, то вона додатна (від'ємна) і на деякому проміжку, що містить цю точку.

Ця властивість безпосередньо випливає з означення неперервності.

2. Сума, різниця, добуток, а також і частка неперервних функцій є функція неперервна (за винятком випадків, коли функція, що знаходиться у знаменнику, дорівнює нулю).

Ця теорема випливає з відповідних властивостей границь.

3. Якщо неперервна функція $f(x)$ має обернену функцію, то обернена функція також неперервна.

4. Якщо функція неперервна на проміжку $[a; b]$, то знайдуться такі точки x_1 та x_2 , що для всіх $x \in [a; b]$ виконуватимуться нерівності:

$$f(x_2) \geq f(x) \text{ і } f(x) \geq f(x_1).$$

Значення $f(x_1)$ та $f(x_2)$ називають *найменшим та найбільшим значеннями функції* на проміжку $[a; b]$.

Приклади неперервних функцій в медицині та біології. 1. Залежність інтенсивності кисневого обміну від маси тварини описує степенева функція

$$y = Ax^\alpha,$$

де x – маса тварини; y – кількість кисню, яка споживається твариною за одиницю часу; A та α – константи для даного класу тварин. Наприклад, для ссавців $\alpha = 0,74$; $A = 70$, для риб $\alpha = 0,8$, $A = 0,3$.

2. Зір, слух та інші сприйняття пов'язані з коливальними процесами, які можуть бути подані через суперпозицію неперервних функцій синуса та косинуса.

3. Процес розчинення лікарського препарату з таблетки описується показниковою функцією:

$$m(t) = m_0 e^{-rt},$$

де t – час; m_0 – початкова маса таблетки; r – коефіцієнт розчинення.

Точки, в яких порушується неперервність функцій, називають *точками розриву*.

Розглянемо класифікацію точок розриву.

1. Якщо при $x \rightarrow x_0$ ліворуч і праворуч існують скінченні односторонні граници функції $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A_1 \text{ і } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A_2,$$

але $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 називається *точкою розриву першого роду*. При цьому функція $y = f(x)$ може бути як визначеною, так і невизначеною в точці x_0 .

2. Якщо при $x \rightarrow x_0$ хоча б одна із границь не існує або є нескінченною, то точку x_0 називають *точкою розриву другого роду*.

Таким чином, для неперервності функції в деякій точці потрібно, щоб у цій точці існували скінченні граници ліворуч та праворуч, щоб ці граници були рівними між собою і щоб вони дорівнювали значенню функції в точці x_0 .

Функція $y = f(x)$ називається неперервною ліворуч від точки x_0 , якщо:

1) функція визначена в точці та лівому її півоколі;

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x);$$

3) виконується рівність

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Аналогічно визначається неперервність функції праворуч від точки x_0 .

Таким чином, функція неперервна в деякій точці, якщо вона неперервна в цій точці ліворуч і праворуч.

Правильне і обернене твердження: якщо функція $f(x)$ неперервна в деякій точці, то вона неперервна в цій точці ліворуч і праворуч.

Наведемо функції, які мають точки розриву.

1. Графік функції $y = E(x)$, де y дорівнює найбільшому цілому числу, що не більше за x , показано на рис. 1.10.

2. Графік функції, яка описує виникнення потенціалу дії (збудження) у нервовому волокні $\phi(t)$, наведений на рис. 1.11. Отримавши сигнал, клітина збуджується за досить короткий проміжок часу, а потім збудження поступово зменшується.

Обидві ці функції мають розриви першого роду. У другому випадку розрив функції може бути усунений, якщо прийняти на проміжку $\tau = \Delta t$ значення потенціалу дії $\phi(t)$ рівним ϕ_0 , де ϕ_0 – потенціал, який спостерігається за відсутності збудження (потенціал спокою); τ – проміжок часу, протягом якого потенціал дії не виникає.

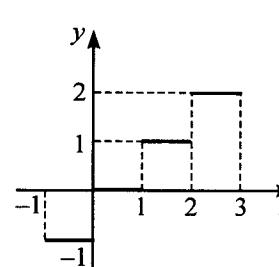


Рис. 1.10

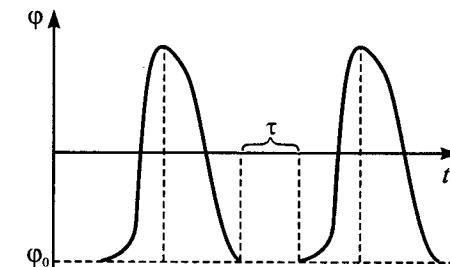


Рис. 1.11

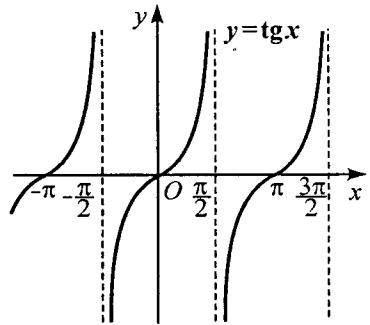


Рис. 1.12.

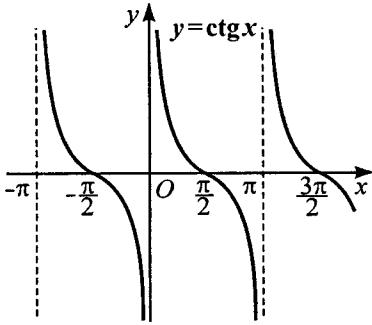


Рис. 1.13.

Точки розриву першого роду поділяють на точки *усувного* і точки *неусувного розривів*.

У випадку усувного розриву $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Функцію $f(x)$ в такому випадку можна довизначити певним чином, щоб дістати неперервну функцію в цій точці.

3. Функція $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 1.12) має розриви у точках $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$, де $k = 0, 1, 2, \dots$. Функція $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 1.13) має розриви у точках $x = \pi \pm k\pi$. Ці точки є точками розриву другого роду.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Розв'язання. Відомо, що $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2}.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$, а $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$, то матимемо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

2. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$ за умови, що $k = \text{const}$.

Розв'язання. Подамо шукану границю у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}} \right]^k.$$

Скориставшись другою чудовою границею, матимемо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}} \right]^k = e^k.$$

3. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Відомо, що $\sin 2x \sim 2x$ при $x \rightarrow 0$, тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0.$$

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x - \sin 4x}{x^3}$.

Розв'язання. Оскільки при $x \rightarrow 0$ $2 \sin 2x \sim 4x$, а $\sin 4x \sim 4x$, то, замінивши в чисельнику нескінченно малі на їм еквівалентні, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

Виконаємо перетворення в чисельнику

$$2 \sin 2x - \sin 4x = 2 \sin 2x(1 - \cos 2x) = 4 \sin 2x \cdot \sin^2 x.$$

При $x \rightarrow 0$

$$4 \sin 2x \cdot \sin^2 x \sim 4 \cdot 2x \cdot x^2 = 8x^3,$$

тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x - \sin 4x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^3}{x^3} = 8.$$

5. Дослідити на неперервність функцію $y = \frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Ця функція невизначена при $x = 0$, але при $x \rightarrow 0$ існує скінччна границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Отже, в точці $x = 0$ дана функція має розрив першого роду, який можна усунути, доозначивши функцію $y(x)$ в цій точці:

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти область визначення функцій.

$$1. \quad y = \sqrt{9 - x^2}.$$

$$2. \quad y = e^x.$$

$$3. \quad y = \frac{1+x}{1-x}.$$

$$4. \quad y = \frac{5}{\sqrt{36 - x^2}}.$$

$$5. \quad y = x \operatorname{tg} x.$$

$$6. \quad y = \sqrt[3]{1-x}.$$

$$7. \quad y = \frac{7 - \sqrt{x-2}}{\sqrt{7-x}}.$$

$$8. \quad y = x \arcsin x.$$

$$9. \quad y = \lg(x+4).$$

Знайти границі функцій.

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1).$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^3 + 1}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^2}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+7}{4x-8}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} x \operatorname{ctg} x.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1+x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+5}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x^2+2}.$$

Дослідити на неперервність функцій.

$$28. \quad f(x) = x + 1 \text{ у точках } x = 0; x = -1.$$

$$29. \quad f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{при } x \geq 1; \\ x & \text{при } x < 1 \end{cases} \text{ у точці } x = 1.$$

Які з наведених нескінченно малих при $x \rightarrow 0$ будуть нескінченно малими вищого порядку, однакового порядку порівняно з $\alpha(x) = x$?

$$30. \quad \beta(x) = 5x.$$

$$31. \quad \beta(x) = \sin^2 x.$$

$$32. \quad \beta(x) = 3 \sin x.$$

$$33. \quad \beta(x) = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$34. \quad \beta(x) = x^3.$$

2

ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

2.1. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКІЇ

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 (символічно $f'(x_0)$) називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу нескінченно малий ($\Delta x \rightarrow 0$), тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Позначення похідної: $f'(x)$, y'_x , \dot{y}_x , $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ в деякій фіксованій точці має похідну, то функція в цій точці неперервна.

Доведення. Згідно з означенням похідної

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Оскільки $f'(x)$ є границею відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то різниця цих величин при $\Delta x \rightarrow 0$ нескінченно мала (п. 1.4), тобто

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(x, \Delta x)$$

або

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \Delta x. \quad (2.2)$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ сума у правій частині цього виразу перетворюється на нуль. Отже,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

а це і означає, що функція в точці x неперервна.

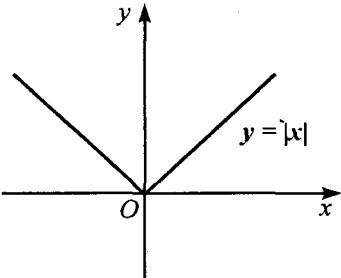


Рис. 2.1

диференційовна на даному проміжку.

Процедуру знаходження похідної називають **диференціюванням** функції.

Приклад. Функція $f(x) = x^2$ має скінченну похідну при будь-якому дійсному x , яка дорівнює $2x$. Справді, для довільного x маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна, то її приріст Δy можна подати у вигляді:

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \Delta x.$$

Добуток $\alpha(x, \Delta x) \Delta x$ є нескінченно малою вищого порядку малини відносно Δx , оскільки

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, \Delta x) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x, \Delta x) = 0. \quad (2.3)$$

Таким чином, приріст диференційової функції складається з двох частин (доданків), перша з яких прямує до нуля “повільніше” ніж друга і є лінійною відносно Δx . Ця частина приросту дісталася назву головної.

Головна частина приросту функції Δy , що рівна добутку похідної y' на приріст аргументу Δx , називається **диференціалом** функції і позначається dy :

$$dy = y' \Delta x.$$

Якщо $y = x$, то $dy = dx = x' \Delta x$, але $x' = 1$. Звідси

$$dx = \Delta x,$$

тобто диференціал незалежної змінної дорівнює її приrostу. Остаточно маємо: **диференціал функції** дорівнює добутку похідної функції на диференціал незалежної змінної

$$dy = y' dx. \quad (2.4)$$

Із (2.4) маємо $y' = \frac{dy}{dx}$, тобто похідна функції дорівнює відношенню диференціала цієї функції до диференціала аргументу.

Із рівностей (2.2) та (2.3) випливає, що при малих Δx справедлива наближена рівність

$$\Delta y \approx dy, \quad (2.5)$$

або

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) dx. \quad (2.6)$$

Ці рівності використовуються при наближених обчисленнях і в теорії похібок; вони дозволяють звести обчислення приросту функції до обчислення похідної (диференціала), що, зазвичай, є більш простою задачею.

Геометричне тлумачення похідної і диференціала. Геометричне тлумачення похідної тісно пов’язане з поняттям дотичної. Дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$ називають граничне положення січної MN (рис. 2.2) при необмеженому наближенні точки N до точки M . Нескладно побачити з рис. 2.2, що кутовий коефіцієнт січної дорівнює: $\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Якщо ж точка N прямує до M , то січна MN займе граничне положення, для якого $\alpha \rightarrow \varphi$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Таким чином, значення похідної $y' = f'(x_0)$ у точці x_0 визначає кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \alpha = \tan \varphi \text{ або } y'(x_0) = \tan \varphi.$$

У цьому і полягає геометричне тлумачення похідної. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у даній точці $M(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Тангенс кута нахилу дотичної ($y' = \tan \varphi$) є дуже важливою і зручною характеристикою поведінки функції в точці: якщо він додатний (кут φ гострий), то функція, очевидно, зростає в околі досліджуваної точки; якщо ж $\tan \varphi < 0$ (кут φ тупий), то спадає; за модулем $|\tan \varphi| = |y'|$ можна судити про швидкість зростання (спадання) функції в точці.

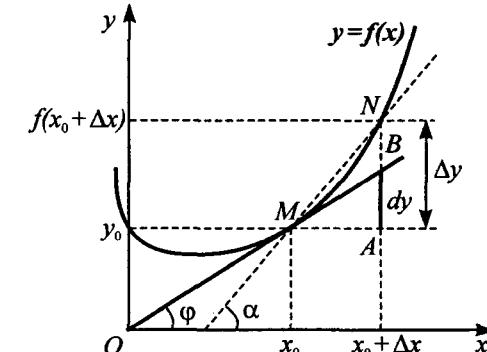


Рис. 2.2

ня) функції. Надалі ми ще повернемося до цього питання і дослідимо його більш детально. Тут можемо лише стверджувати, що характер похідної повністю визначається характером вихідної функції $y = f(x)$.

Doctrina est fructus duclis radicis amarae.
Діонісій Катон

Як видно з рис. 2.2, $AB = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$, оскільки $\operatorname{tg} \varphi = y'(x_0)$, а $\Delta x = dx > 0$, $AB = dy$, тобто диференціал dy дорівнює приrostу ординати дотичної, проведеної в точці M до графіка даної функції $y = f(x)$.

Фізичне тлумачення похідної і диференціала. У кожній точці, де функція $y = f(x)$ диференційовна, похідна $y' = f'(x_0)$ є швидкістю зміни функції у цій точці відносно аргументу x . Заміна приросту функції її диференціалом дозволяє вважати процес зміни функції лінійним відносно достатньо малих змін аргументу.

Приклади. 1. Якщо $s(t)$ – закон руху матеріальної точки, то згідно з означенням миттєва швидкість на даний момент часу $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Таким чином, миттєва швидкість:

$$v = \frac{ds}{dt} = s'.$$

Диференціал $ds = v dt$ визначає шлях, який пройшла б матеріальна точка за час $\Delta t = dt$, рухаючись рівномірно.

2. Analogічно, якщо $q = q(t)$ – закон, що визначає залежність величини заряду, який протікає через поперечний переріз провідника, від часу t , то похідна $I = q' = \frac{dq}{dt}$ визначає силу струму в момент часу t . Диференціал $dq = Idt$ визначає кількість електрики, яка пройшла б за проміжок часу dt при силі постійного струму I через поперечний переріз провідника.

3. Якщо $p(t)$ визначає розмір популяції бактерій в момент часу t , то $\frac{dp}{dt} = p'$ – швидкість зростання популяції, а $dp = p' dt$ – зміну чисельності популяції за достатньо малий проміжок часу dt .

2.2. ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Припустимо, що $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – диференційовні функції незалежної змінної x ; c – деяка константа, тоді справедливими є такі твердження.

1. **Похідна сталої $y = c$ дорівнює нулю:**

$$c' = 0.$$

2. **Похідна суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:**

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. **Постійний множник можна винести за знак похідної:**

$$(cu)' = c u'.$$

4. **Похідна добутку функцій визначається за формулою:**

$$(u v)' = u' v + u v'.$$

5. **Похідна частки**

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{v'u - u'v}{v^2} \text{ за умови, що } u \neq 0.$$

Правила обчислення диференціала такі ж, як і правила обчислення похідних (звідси термін диференціювання). Щоб отримати диференціал функції потрібно похідну помножити на диференціал незалежної змінної.

2.3. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Обчислення похідної, а, отже, і диференціала безпосередньо за означенням досить громіздке. Наведемо ряд результатів, які дозволяють значно спростити процедуру диференціювання.

$$1. (x^n)' = n x^{n-1}.$$

$$2. (\sin x)' = \cos x.$$

$$3. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$4. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$5. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$6. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$7. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$8. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$9. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$10. (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$11. (e^x)' = e^x.$$

$$12. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$13. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad (x > 0, a > 0).$$

2.4. ПРАВИЛО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДЕНОЇ ФУНКІЇ

Якщо $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, тобто $y = f[\varphi(x)]$ – складена функція, і функції $y(u)$ та $u(x)$ – диференційовні, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ також диференційовна, причому

$$y'(x) = y'(u)u'(x), \quad (2.7)$$

або в інших позначеннях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Доведення. Функція $y = f(u)$ має похідну в точці u , тоді згідно з (2.3)

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(u, \Delta u) \cdot \Delta u.$$

Функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x , тоді

$$\Delta u = u'_x \Delta x + \beta(x, \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Маємо

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \Delta x + y'_u \beta \Delta x + u'_x \alpha \Delta x + \alpha \beta \Delta x.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x + y'_u \cdot \beta + u'_x \cdot \alpha + \alpha \beta.$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ і отримаємо

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Це правило поширюється на ланцюжок із будь-якого числа диференційовних функцій. Наприклад, якщо $y = \sin^2 x^3$, то

$$y' = 2 \sin x^3 (\sin x^3)' = 2 \sin x^3 \cos x^3 (x^3)' = 3x^2 2 \sin x^3 \cos x^3 = 3x^2 \sin 2x^3.$$

Інваріантність (незмінність) форми диференціала. Формула для обчислення диференціала функції $y = f(u)$ не залежить від того, чи буде u незалежною змінною, чи функцією від незалежної змінної.

Нехай $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, тобто $y = f[\varphi(x)]$, і обидві ці функції диференційовні. Тоді

$$dy = f'_u du,$$

якщо u незалежна змінна. Якщо ж незалежна змінна x , то $dy = y'_x \cdot dx$. Враховуючи, що $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, маємо

$$dy = y'_u \cdot u'_x \cdot dx = y'_u \cdot du = f'_u du.$$

Цю властивість називають *інваріантністю форми диференціала* функції однієї змінної.

2.5. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

Похідна $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ сама може бути неперервною функцією, в такому випадку можна ввести поняття похідної другого порядку. *Похідною другого порядку* або другою похідною функції називається похідна від її похідної:

$$(f'(x))' = f''(x) = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

тобто

$$y'' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y'(x_0 + \Delta x) - y'(x_0)}{\Delta x}.$$

Наприклад, прискорення згідно з означенням є друга похідна від шляху за часом $a(t) = s''(t)$. Якщо друга похідна (функція $f''(x)$) диференційовна, то можна визначити третю похідну $f'''(x)$.

Похідну n -порядку функції $y = f(x)$ позначають через $y^{(n)}(x)$ або $\frac{d^n y}{dx^n}$ і отримують у результаті диференціювання n разів функції $y = f(x)$. При обчисленні похідних вищих порядків використовуються ті ж правила, що і при обчисленні похідної першого порядку.

Розкриття невизначеностей. **Правило Лопітала.** У розділі 1, ми познайомилися з деякими способами знаходження границь двох нескінченно малих і нескінченно великих. Розглянемо новий метод для розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, який називається *правилом Лопітала*.

Теорема. Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних, якщо ці похідні існують, тобто

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (2.8)$$

Для простоти доведення розглянемо випадок $\frac{0}{0}$ і будемо вважати, що функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ разом зі своїми похідними $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ неперервні в точці a і $\varphi'(a) \neq 0$.

Нехай

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 \quad (2.9)$$

та

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0. \quad (2.10)$$

Різницю $f(x) - f(a)$ можна розглядати як приріст функції, що відповідає приросту аргументу $\Delta x = x - a$. Тому

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \quad (2.11)$$

Аналогічно

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a) \neq 0. \quad (2.12)$$

Враховуючи формули (2.9) та (2.10) при $x \neq a$, матимемо

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}.$$

Перейшовши до границі і враховуючи (2.11) та (2.12), дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Приклади. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$.

Інколи правило Лопітала доводиться застосовувати декілька разів.

2. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin^2 x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1} = 0$.

Такі типи невизначеностей, як

$$0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty,$$

за допомогою тогожних перетворень можна звести до типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x)$.

Тут ми маємо невизначеність типу $0 \cdot \infty$. Запишемо цей вираз у вигляді $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Дістали

невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скориставшись правилом Лопітала, маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

2.6. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКІЙ НА МОНОТООННІСТЬ. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКІЙ

У цьому параграфі буде показано, як за допомогою похідних можна виявити основні особливості поведінки функцій: знайти проміжки монотонності та точки екстремуму. При геометричному тлумаченні змісту похідної ми помітили, що на проміжку зростання функції кутовий коефіцієнт дотичної, а, отже, і похідна функції будуть додатними, а на проміжку спадання – від’ємними. Прості й наочні міркування, які привели до такого висновку, справедливі й у загальному випадку. Сформулюємо їх у вигляді ознак.

Достатня ознака монотонності. Розглянемо функцію $y = f(x)$, неперервну і диференційовну на деякому відрізку $a \leq x \leq b$. Якщо при цьому в кожній точці деякого проміжку з указаного інтервалу виконується нерівність:

$$y' > 0, \quad (2.13)$$

то на цьому проміжку функція є зростаючою.

Якщо ж

$$y' < 0 \quad (2.14)$$

на деякому проміжку, то на цьому проміжку функція є спадною.

Максимуми та мінімуми функцій. Кажуть, що функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум (мінімум), якщо існує такий окіл цієї точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, що для кожного x із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Інакше кажучи, функція $f(x)$ має в точці x_0 максимум (мінімум), якщо для досить малого приросту Δx (будь-якого знаку) виконується нерівність: $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ ($f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$).

Максимуми або мінімуми функції називаються її *екстремумами*.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо диференційовна в деякому інтервалі $(a; b)$ функція має в точці $x_0 \in (a; b)$ екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулью: $f'(x_0) = 0$.

Внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна або існує і дорівнює 0, або не існує, називають *критичними*. Рівність похідної нулю є необхідною, але не достатньою умовою екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ похідна $y' = 3x^2$ перетворюється в нуль при $x = 0$. Але при $x = 0$ функція $y = x^3$ екстремуму не має (див. рис. 1.5).

Достатня умова існування екстремуму. Якщо похідна функції $f'(x)$

перетворюється в нуль в точці x_0 і при переході через цю точку в напрямі зростання x змінює знак “+” (“−”) на “−” (“+”), то в точці x_0 ця функція має максимум (мінімум). Якщо ж перша похідна функції при переході через точку x_0 не змінює знаку, то в цій точці функція $f(x)$ екстремуму не має.

Друга достатня умова існування екстремуму. Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 та її околі неперервні першу та другу похідні, причому $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то функція має в точці x_0 мінімум (максимум), якщо $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$).

Максимальне та мінімальне значення функції на відрізку. Спочатку зауважимо, що не слід плутати максимум (мінімум) з найбільшим (найменшим) значенням функції на проміжку. Згідно з означенням максимум (мінімум) – це така точка, в якій функція набуває найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями функції в досить близьких до екстремальної точках. Функція може мати декілька максимумів і мінімумів, проте найбільше значення, якщо воно існує, – єдине. Це саме стосується і найменшого значення. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найменшого і найбільшого значень, для визначення яких необхідно знайти всі критичні точки

Щоб переварити знання, необхідно поглинати їх з appetитом.

А. Франс

функції, що належать цьому відрізку, а також додати до них значення на кінці відрізка ($x = a$; $x = b$), знайти значення функції у всіх цих точках; вибрать з них найбільше та найменше.

Якщо $f(x)$ має на відрізку $[a; b]$ скінченну кількість точок розриву, то потрібно також дослідити поведінку функції в околі кожної точки розриву. У випадку відкритого проміжку досліджують також поведінку функції в односторонніх околах кінців проміжку.

2.7. ОПУКЛІСТЬ ТА УГНУТІСТЬ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ ПЕРЕГІНУ

Говорять, що графік диференційованої функції $y = f(x)$ **опуклий (угнутий)** на інтервалі $(a; b)$, якщо при будь-яких значеннях x з цього інтервалу дуга кривої розміщена нижче (вище) дотичної, проведеної в будь-якій точці інтервалу (рис. 2.3: а – опуклий, б – угнутий).

Достатньою умовою того, що графік визначеної і двічі диференційованої функції опуклий, є виконання на відповідному інтервалі нерівності:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) < 0, \quad (2.15)$$

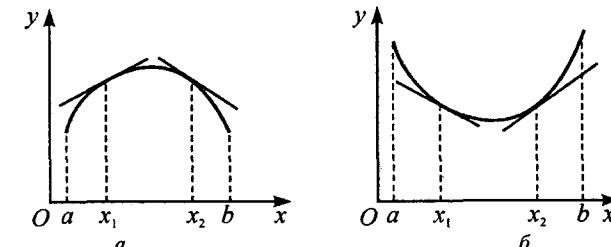


Рис. 2.3

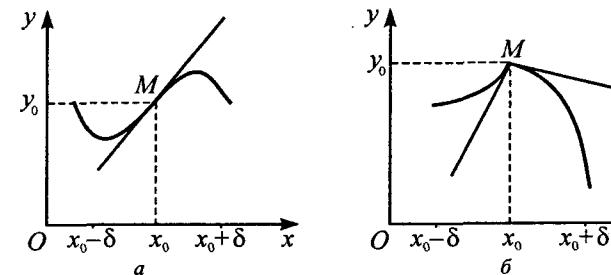


Рис. 2.4

якщо ж

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) > 0, \quad (2.16)$$

то графік функції угнутий.

Точки кривої, які відокремлюють угнуту її частину від опуклої і при цьому існують дотичні до графіка у цих точках, називаються **точками перегину**. Так, на рис. 2.4, а точка $M(x_0, y_0)$ є точкою перегину, а на рис. 2.4, б не є точкою перегину. У точках перегину друга похідна або не існує, або дорівнює нулю:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 0.$$

Це і є **необхідна умова перегину. Достатньою умовою** того, щоб деяка точка була точкою перегину, є зміна знаку другої похідної при переході через таку точку. Точки, в яких друга похідна дорівнює нулю, називають **критичними точками другого роду**. Таким чином, щоб знайти точки перегину, потрібно:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) визначити другу похідну;
- 3) знайти критичні точки другого роду з умовою $f''(x) = 0$;
- 4) розбити область визначення на інтервали, межами яких є критичні точки другого роду;
- 5) визначити знак $f''(x)$ в цих інтервалах.

Якщо при переході з одного інтервалу в інший, знак $f''(x)$ змінюється, то критична точка є точкою перегину.

2.8. АСИМПТОТИ КРИВОЇ

Кривою з нескінченною гілкою називають криву, що описується графіком функції $y = f(x)$, для якого виконується одна з умов:

- 1) область визначення функції не обмежена (наприклад, $y = \sin x$);
- 2) область значень функції не обмежена (наприклад, $y = \operatorname{tg} x$);
- 3) область визначення і область значень функції не обмежені (наприклад, $y = x^2$).

Асимптою кривої з нескінченною гілкою називається така пряма $y = kx + b$, для якої границя відстані σ від точок на кривій до прямої при прямуванні змінної до деякого числа c або до нескінчності дорівнює нулю (рис. 2.5), тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty(c)} \sigma = 0$$

або

$$\lim_{x \rightarrow \infty(c)} (f(x) - kx - b) = 0. \quad (2.17)$$

Рівняння (2.17) можна розглядати як рівняння асимптоти.

Криві з нескінченною гілкою можуть мати три види асимптот: горизонтальні ($k = 0$), похилі ($k \neq 0$) та вертикальні. Для існування вертикальної асимптоти необхідно і достатньо, щоб границя функції $y = f(x)$ при x , що прямує до скінченного числа, дорівнювала нескінчності:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty.$$

Для знаходження k і b у випадку похилої асимптоти рівність (2.17) запишемо у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Звідси

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (2.18)$$

Знаючи k , з рівності (2.18) знайдемо b :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

Якщо k або b нескінченні, то похилих асимптот немає. Якщо $k = 0$, то $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, – асимптою горизонтальна.

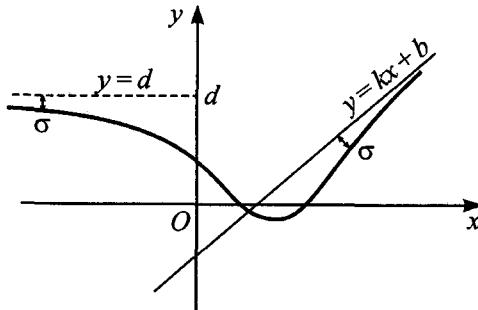


Рис. 2.5

2.9. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ І ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

Повне дослідження функції проводять за схемою:

- 1) знаходить область визначення, точки розриву, множину значень функції;
- 2) визначають асимптоти графіка;
- 3) досліджують функцію на парність, періодичність;
- 4) досліджують функцію на монотонність і знаходить її екстремуми;
- 5) визначають інтервали опукlosti і угнутості графіка, точки перегину;
- 6) знаходить точки перетину з осями координат;
- 7) будуєть графік.

Приклади. 1. Побудуємо графік функції $y = e^{-x^2}$.

1) Ця функція визначена, неперервна і додатна на всій числовій осі.

2) Оскільки множина значень функції обмежена, то вона може мати лише горизонтальну асимптоту. Перевіримо це. Згідно з (2.18)

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = 0.$$

Підставивши k в рівняння асимптоти (2.17), дістанемо $\lim_{x \rightarrow \infty} |e^{-x^2} - b| = 0$, а отже і $b = 0$. Таким чином, горизонтальною асимптотою при $x \rightarrow \infty$ є вісь Ox .

3) Функція парна: $y(-x) = y(x)$. При $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow 0$, а це означає, що пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою, як при $x \rightarrow \infty$, так і при $x \rightarrow -\infty$.

4) Похідна $y' = -2x e^{-x^2}$ дорівнює нулю лише при $x_0 = 0$. Причому, при $x > 0$ похідна $y' < 0$, а значить, функція спадає, а при $x < 0$ похідна додатна, $y' > 0$, досліджувана функція зростає. Ордината функції дорівнює 1. Отже, точка з координатами $(0; 1)$ є точкою максимуму.

5) Друга похідна $y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ дорівнює нулю при $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ і $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Результати зручно подати у вигляді таблиці.

Значення x	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$
Значення $f''(x)$	Додатні	0	Від'ємні	0	Додатні
Опуклість точки перегину $f(x)$	Угнута	$y_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ – точка перегину	Опукла	$y_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ – точка перегину	Угнута

Графік цієї функції подано на рис. 2.6, а. Це так звана *крива Гаусса*.

2. Побудуємо графік функції $z = y' = -2x e^{-x^2}$. Ця функція непарна, визначена і неперервна на всій числовій осі. Вісь абсцис є горизонтальною асимптотою: $y \rightarrow 0$ як при $x \rightarrow +\infty$, так і при $x \rightarrow -\infty$, оскільки $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2x e^{-x^2}) = 0$. Враховуючи, що $z' = y''(x)$, і проаналізувавши результати таблиці, бачимо, що $z(x)$ має максимум при $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ і мінімум при $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

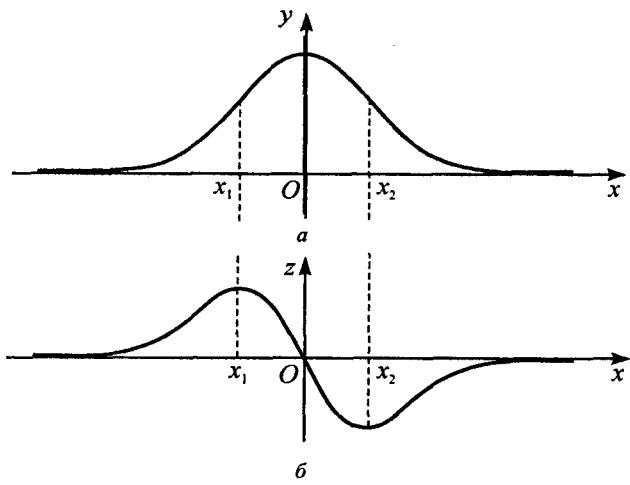


Рис. 2.6

Ординати цих точок відповідно дорівнюють $z_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-2} = \frac{\sqrt{2}}{e^2}$ і $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{e^2}$. Для виявлення точок перегину знайдемо $z'' = y'''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. Ця функція перетворюється в нуль лише при $x_0 = 0$. Причому при $x < 0$ похідна $y''(x) > 0$ і функція направлена випуклістю вгору, а при $x > 0$, $y''(x) > 0$, – випуклістю вниз. Точка $(0; 0)$ є точкою перегину. Графік функції $z = y' = -2x e^{-x^2}$ представлений на рис. 2.6, б.

У медицині широко використовуються методики, які базуються на дослідженні залежностей $y(x)$ та $y'(x)$, де y – деякий фізіологічний параметр, x – незалежна змінна.

3. Якщо на речовину діяти одночасно магнітним полем, індукція якого B , і електромагнітним полем, то можна спостерігати явище магнітного резонансу. При цьому має місце селективне поглинання речовиною енергії електромагнітних хвиль W_{ex} певної частоти v . Якщо речовина містить парамагнітні частинки (часто їх вводять спеціально), то магнітний резонанс у ній називають електронним парамагнітним резонансом (ЕПР). ЕПР широко використовується у медико-біологічних дослідженнях з діагностичною метою, у санітарно-гігієнічних цілях, у генійній інженерії.

Залежність поглинутої речовиною енергії електромагнітного поля від індукції магнітного поля наведено на рис. 2.7, а. Більш інформативним є не дослідження функції $W(B)$, а її похідної dW/dB (рис. 2.7, б), сучасні ЕПР-спектрометри реєструють саме цю криву.

Аналіз графіків, поданих на рис. 2.7, дозволяє виявити особливості, характерні для графіка функції (а) та її похідної (б): відповідність між точками перегину для залежності $y(x)$ та точками екстремуму $y'(x)$; точками екстремуму для $y(x)$ та перетину з віссю Ox на $y'(x)$.

Наведені графіки дають можливість побачити ті характерні особливості, які спостерігаються при порівнянні графіка функції та її похідної.

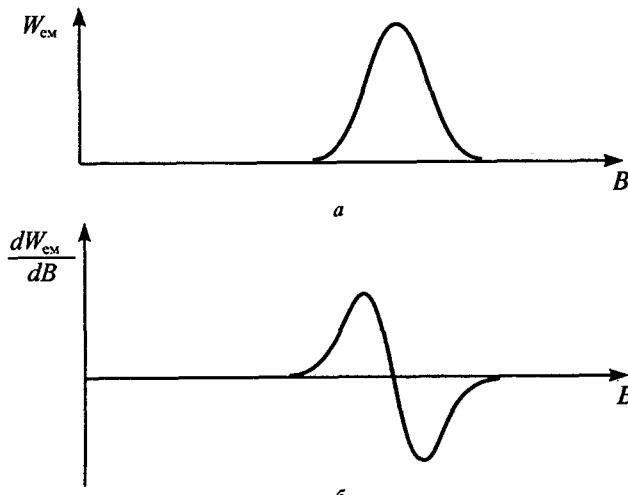


Рис. 2.7

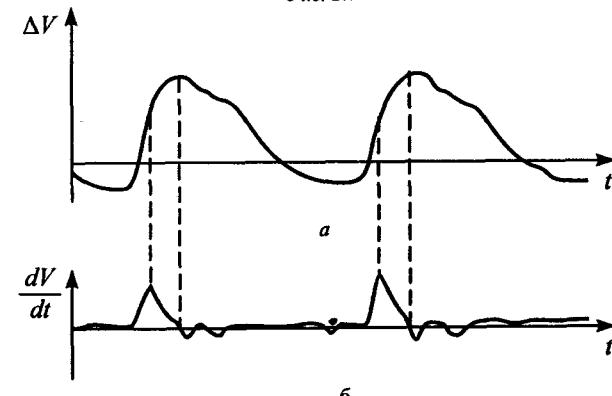


Рис. 2.8

4. Реографія – ще одна діагностична методика, що має широке використання. В її основі лежить лінійна залежність між змінами об'єму ділянки біологічної тканини ΔV та змінами її електричного опору: $\Delta V - \Delta R$. Сучасні реографи дозволяють отримувати як об'ємну реограму, так і диференціальну. На рис. 2.8 представлені графіки реонефrogram: а – об'ємної та б – диференціальної.

Як видно із цих графіків, точкам екстремуму на об'ємній реонефrogramі відповідають точки перегину з віссю часу на диференціальній реонефrogramі, аналогічно точкам перегину відповідають точки екстремуму на диференціальній реонефrogramі.

Не можна перепливати море, просто стоячи і дивлячись на воду.

Р. Тагор

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $y = x^{\frac{1}{2}}$ і використаємо правило знаходження похідної степеневої функції

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Знайти похідну функції $y = (x^2 - 2x + 3)^5$.

Розв'язання. Вважаючи $y = u^5$, де $u = x^2 - 2x + 3$, а $u' = 2(x-1)$, відповідно з правилом диференціювання складеної функції (2.7) будемо мати

$$y' = 5u^4u' = 10(x^2 - 2x + 3)^4(x-1).$$

3. Знайти похідну функції $y = \sin^3 4x$.

Розв'язання. Позначивши $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = 4x$, і, враховуючи, що $y' = 3u^2u'$, а $u' = (\sin v)'v'$, де $v' = 4$, знаходимо $y' = 12\sin^2 4x \cos 4x$.

Примітка: маючи достатні навички, проміжні змінні u та v не записують, вводячи їх лише в уяві (подумки).

4. Розчинення лікарської речовини з таблетки описується рівнянням $m = m_0 e^{-rt}$, де m_0 – початкова маса таблетки; m – нерозчинена маса в момент часу t ; r – стала при заданих умовах. Записати рівняння для швидкості розчинення.

Розв'язання. Оскільки похідна дорівнює швидкості зміни функції, то швидкість розчинення: $m' = -rm_0 e^{-rt} = -rm$.

Отже, швидкість розчинення пропорційна масі таблетки, яка залишилася.

5. Знайти похідну першого, другого та третього порядку від функції $f(x) = e^x \sin x$.

Розв'язання.

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x);$$

$$f''(x) = [e^x(\sin x + \cos x)]' = e^x(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)e^x = 2e^x \cos x;$$

$$f'''(x) = (2e^x \cos x)' = 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x).$$

6. Знайти диференціал функції $y = \ln x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $y' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$. Скориставшись формuloю $dy = y'dx$, отримуємо $dy = \frac{2dx}{x}$.

7. Чисельність популяції бактерій з часом t змінюється за законом

$$N = N_0 + \frac{N_0 t}{c + t^2},$$

де N_0 – початкова кількість бактерій в популяції; c – деяка константа. Знайти максимальний розмір популяції, якщо $N_0 = 10^3$; $c = 400$.

Розв'язання. Обчислимо похідну

$$N' = N_0 \frac{c + t^2 - 2t^2}{(c + t^2)^2} = N_0 \frac{c - t^2}{(c + t^2)^2}.$$

З умови $c - t^2 = 0$ ($N' = 0$) знайдемо критичні точки. Змісту задачі відповідає лише точка $t = \sqrt{c}$, у ній функція має максимум, оскільки при $t < \sqrt{c}$ (наприклад, при $t = 0$) $N' > 0$, – функція зростаюча, а при $t > \sqrt{c}$ $N' < 0$, – функція спадна. Максимальна чисельність популяції $N = N_0 + \frac{N_0 \sqrt{c}}{2c} = 1025$.

8. Вміст глюкози в крові хворого при вливанні краплями визначається рівнянням: $c(t) = a - b e^{-rt}$, де a і b – константи; t – час. Побудувати графік $c(t)$, знайти рівноважний вміст глюкози.

Розв'язання. Функція визначена і неперервна на всій числовій прямій, однак, фізичний зміст вона має лише при $t > 0$. Проведемо дослідження у цій області. Якщо $t = 0$, то $c(0) = a - b$. Пряма $c = a$ є горизонтальною асимптою, оскільки при $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} b e^{-rt} = a$. Похідна $c'(t) = b e^{-rt}$ не може бути рівною нулю і при всіх можливих значеннях t є додатною $c'(t) > 0$, тобто досліджувана функція монотонно зростаюча у всій області визначення. Для всіх $t \in (0; \infty)$ – функція додатна.

Друга похідна $c''(t) = -b e^{-rt}$ є від'ємною для всіх значень t і прямує до нуля, лише якщо $t \rightarrow \infty$. Отже, досліджувана функція направлена випуклістю вгору і не має точок перегину. Графік її подано на рис. 2.9. Рівноважний вміст глюкози дорівнює a і досягається при $t \rightarrow \infty$.

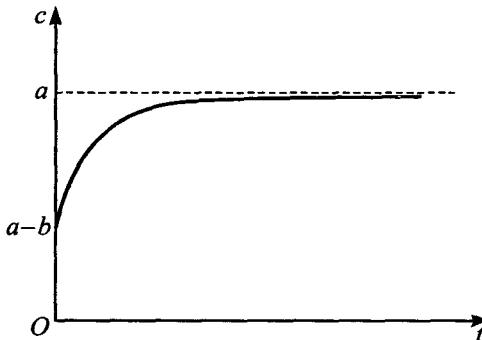


Рис. 2.9

9. Дослідити на екстремум функцію, яка описує зміну маси лікарського препарату в крові пацієнта при пероральному та внутрішньом'язовому введенні:

$$m(t) = \frac{M_0 r}{r - k} (e^{-kt} - e^{-rt}),$$

де M_0 – початкова маса препарату в депо; k – постійна елімінації; r – деяка константа, яка характеризує швидкість усмоктування.

Розв'язання. Похідна $m'(t) = -\frac{M_0 r}{r - k} (k e^{-kt} - r e^{-rt})$ перетворюється в нуль, якщо $k e^{-kt} - r e^{-rt} = 0$. Злогарифмувавши цей вираз, бачимо, що критичною точкою є $t = \frac{\ln \frac{k}{r}}{k - r}$. Перевіряючи зміну знаку похідної, враховуємо, що $k < r$. Надаючи k та r будь-яких додатних значень, переконуємося, що в даній точці функція має максимум.

10. Дослідити на екстремум функцію $y = x^3 - 3x + 3$. Знайти точки перегину. Побудувати графік $y(x)$ та $y'(x)$.

Розв'язання. Обчислимо похідну функції $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Розв'язавши рівняння $3(x^2 - 1) = 0$, знайдемо критичні точки $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$. Ці точки розбивають числову вісь $-\infty < x < +\infty$ на три інтервали. Оскільки досліджувана функція неперервна, то в кожному з інтервалів $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ похідна має постійний знак. Щоб з'ясувати знак похідної в певному інтервалі, досить знати знак у будь-якій точці цього інтервалу. Наприклад, прийнявши $x = -2$, отримуємо $y' = 9 > 0$, а це значить, що в інтервалі $(-\infty; -1)$ $y' > 0$ – функція зростає. Аналогічно в інтервалі $(-1; 1)$ $y' < 0$ – функція спадає; в інтервалі $(1; +\infty)$ $y' > 0$ – зростає. Отже, точка $A(-1; 5)$ є точкою максимуму, а точка $B(1; 1)$ – точка мінімуму (рис. 2.10, а).

Знайдемо другу похідну функції $y'' = 6x$ і прирівняємо її до нуля. Рівняння має один розв'язок $x = 0$. Підставивши в другу похідну значення з інтервалу $(-\infty; 0)$, бачимо, що в цьому проміжку $y'' < 0$. Аналогічно встаново-

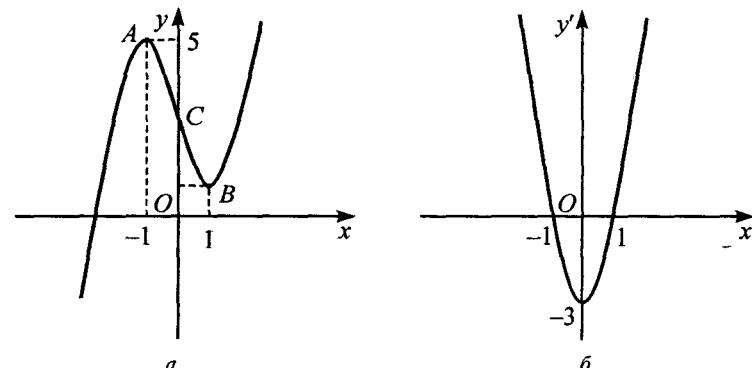


Рис. 2.10

вимо, що в інтервалі $(0; \infty)$ $y'' > 0$. Тобто точка $C(0; 3)$ є точкою перегину. Крива $y = x^3 - 3x + 3$ опукла в інтервалі $(-\infty; 0)$ і вгнута в інтервалі $(0; +\infty)$ (рис. 2.10, а).

Побудуємо графік функції $y' = f'(x)$. Застосувавши ту ж саму методику дослідження, бачимо, що $y' = 3(x^2 - 1)$ матиме екстремум при тому ж значенні незалежної змінної x , при якому графік функції $y = x^3 - 3x + 3$ має перегин. Точка з координатами $(0; -3)$ є точкою мінімуму, тому що y' змінює знак з “–” на “+”. Точкам екстремуму на графіку $y = f(x)$ відповідають точки перегину з віссю Ox на графіку $y' = f'(x)$. Крива $y' = 3(x^2 - 1)$ не має точок перегину, бо її друга похідна є величина стала, $(y'') = 6$. Графік подано на рис. 2.10, б.

11. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.

Розв'язання. У даному випадку маємо невизначеність типу 0^0 . Прийнявши $y = x^x$, після логарифмування дістанемо $\ln y = x \ln x$. Оскільки логарифмічна функція є неперервною, то

$$\begin{aligned} \ln \lim_{x \rightarrow 0+0} y &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x \cdot \ln x) = 0; \\ \ln \lim_{x \rightarrow 0+0} y &= 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\lim_{x \rightarrow 0+0} y = e^0 = 1$, тобто $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$.

Наведений тут спосіб логарифмування використовується також у випадку невизначеностей типу ∞^0 , 1^∞ .

12. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n}$.

Розв'язання. Скориставшись правилом Лопітала, матимемо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}}.$$

Знову отримали невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопітала n -кратно

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x (\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x (\ln a)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = \\ &= \frac{(\ln a)^n}{n!} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty. \end{aligned}$$

Отже, показникова функція a^x при $x \rightarrow \infty$ збільшується швидше, ніж степенева x^n , де n – довільне додатне число.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні функцій.

1. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$.

2. $y = \frac{1}{4} - \frac{x}{3} + x^2 - 0,5x^4$.

3. $y = ax^2 + bx + c$.

4. $y = \frac{x+2}{x}$.

5. $y = \frac{-5x^3}{a}$.

6. $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

7. $y = \frac{\pi}{x} + \ln x$.

8. $y = \frac{a+bx}{c+bx}$.

9. $y = \frac{2x+3}{x^2 - 5x + 5}$.

10. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^5} + \frac{1}{x^3}$.

11. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$.

12. $y = \sqrt{x}(x-1)$.

13. $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$.

14. $y = \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$.

15. $y = 5 \sin x + 3 \cos x$.

16. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

17. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

18. $y = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$.

19. $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$.

20. $y = x \operatorname{ctg} x$.

21. $y = x \operatorname{arcsin} x$.

22. $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.

23. $y = x^7 e^x$.

24. $y = (x-1) e^x$.

25. $y = \frac{e^x}{x^2}$.

26. $y = \frac{x^5}{e^x}$.

27. $f(x) = e^x \cos x$.

28. $y = (x-1) e^{x^2}$.

29. $y = e^x \operatorname{arcsin} x$.

30. $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

31. $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$.

32. $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$.

33. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.

34. $y = (3+2x^2)^4$.

35. $y = \sqrt{1-x^2}$.

36. $y = \sqrt[3]{a+bx^3}$.

37. $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$.

38. $y = (3-2 \sin x)^5$.

39. $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x$.

40. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha}$.

41. $y = 2x + 5 \cos^3 x$.

42. $y = e^{\sin x^2}$.

43. $f(x) = (1-3 \cos 2x)^2$.

44. $y = \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{\cos x}$.

45. $y = \sqrt{3 \sin x - 2 \cos x}$.

46. $y = \sqrt{1+\arcsin x}$.

47. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} - \operatorname{arcsin}^3 x$.

48. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

49. $y = \sqrt{e^{x^2} + x}$.

50. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

51. $y = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

52. $y = \sin(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg} \frac{a}{x}$.

53. $f(x) = \cos(\omega x + \beta)$.

54. $f(t) = \sin \omega t + \sin(\omega t + \phi)$.

55. $y = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

56. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

57. $y = \cos 5x^2 - 4 \cos x^2$.

58. $y = \arcsin 2x$.

59. $y = \arcsin \frac{1}{x^2}$.

60. $y = \ln^2 x^2$.

61. $f(t) = t \sin 2t$.

62. $f(x) = \arccos x^3$.

63. $y = \arccos e^x$.

64. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

65. $y = \ln(2x + 7)$.

66. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1+x}{1-x}$.

Знайти похідні другого порядку від функцій.

67. $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$.

68. $y = e^{x^2}$.

69. $y = \sin x^2$.

70. $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$.

71. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

72. $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.

73. $y = \arcsin^2 x$.

74. $y = a \ln \frac{x}{a}$.

Знайти диференціали функцій.

75. $y = \ln(e^x + 5 \sin x - 4 \arcsin x)$.

76. $y = \sqrt{\ln(x+1)} + \ln \sqrt{x+1}$.

77. $y = \ln(\arcsin 5x)$.

78. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

79. $y = \ln \sin x + x^3$.

80. $y = \sin^2 3x + \ln x^2$.

81. $y = \frac{x^3}{\sin^2 3x}$.

82. $y = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

83. $y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctg} x)$.

84. $y = \sin^3 5x \cos^2 \frac{x}{3}$.

85. $y = \arcsin(\ln x)$.

86. $y = \ln^2 \cos x$.

87. $y = e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}$.

88. $y = e^{\sin x} \sin x$.

89. $y = \cos e^x$.

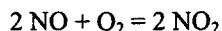
90. $y = \ln^3 x^2$.

91. Рівняння руху точки вздовж осі Ox має вигляд

$$x = 100 + 5t - 0,001t^2.$$

Знайти швидкість і прискорення в моменти часу $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$.

92. При якій концентрації кисню реакція окислення



відбувається з найбільшою швидкістю? Швидкість реакції визначається за формулою $u = hx(100 - x)^2$, де x – концентрація кисню в %; h – константа.

93. Психофізичний закон Вебера–Фехнера відображає залежність гучності L від інтенсивності звуку I : $L = k \lg \frac{I}{I_0}$. Побудувати графік залежності $L(I)$ та $L'(I)$.

Дослідити функції на екстремум.

94. $y = 2 + x - x^2$.

95. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

96. $y = \frac{e^x}{x}$.

97. $y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

98. $y = (x-2) \frac{8-x}{x^2}$.

99. $y = \frac{16(4-x^2)}{x}$.

Користуючись правилом Лопітала, знайти.

100. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}$.

101. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} 2x}$.

102. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\frac{\pi}{2} - x}$.

103. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$.

104. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$.

105. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2)^{\frac{1}{x}}$.

106. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$.

107. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

108. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 + 7x - 18}$.

109. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

3.1. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ І ЧАСТИННІ ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Поняття функції однієї змінної не охоплює всі функціональні залежності, що існують у природі. У багатьох прикладних задачах доводиться мати справу з функціями багатьох змінних. Наприклад, рівень радіоактивного забруднення є функцією координат і часу, тиск газу є функцією об'єму і температури.

Нехай \mathbf{G} – множина точок координатної площини. Розглянемо функцію $f(M)$, $M \in \mathbf{G}$, яка кожній точці M множини \mathbf{G} ставить у відповідність деяке дійсне число $u = f(M)$. Оскільки точка M однозначно визначається своїми координатами $(x; y)$, то кажуть, що u є функцією двох змінних x та y , і записують

$$u = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{G}.$$

Таким чином, функцією двох змінних $f(x; y)$ називається функція, яка кожній парі чисел $(x, y) \in \mathbf{G}$ ставить у відповідність деяке число $u = f(x, y)$.

Наприклад, $f(x, y) = e^{xy} + \sin y - x^2$; $f(2, 0) = e^0 + \sin 0 - 2^2 = -3$.

Аналогічно визначаються функції трьох і більшої кількості змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Наприклад, $f(x, y, z) = \frac{\cos z - x^3}{2^y + x^4}$; $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \operatorname{tg} 7x_1 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$.

Областю визначення D функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається множина всіх наборів (x_1, x_2, \dots, x_n) , при яких функція, має зміст. Наприклад, областью визначення функції $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ є множина пар (x, y) , при яких $x+y \geq 0$.

Запишемо приріст функції $z = f(x, y)$, який відповідає приросту Δx аргументу x при фіксованому $y = y_0$:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Утворимо відношення приросту функції Δz до приросту аргументу Δx :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Якщо існує границя цього відношення при умові, що $\Delta x \rightarrow 0$, то вона називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x у точці (x_0, y_0) . Це символічно записується

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x(x, y).$$

Аналогічно вводиться частинна похідна по y і позначається $\frac{\partial z}{\partial y}$, z'_y , f'_y .

Частинною похідною функції багатьох змінних називається похідна функції, яка обчислена на основі припущення, що змінюється лише один із аргументів, а решта постійні.

Будемо вважати, що функція $z = f(x, y)$ має частинну похідну $\frac{\partial f}{\partial y}$ в околі деякої точки M . Якщо при цьому існує частинна похідна по y від $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають змішаною частинною похідною в точці M :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Якщо похідну беруть двічі по одній і тій самій змінній, то її позначають:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Справедливе співвідношення

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Це твердження носить назву **теореми Шварца**, яку без доведення сформулюємо для функції n незалежних змінних.

Теорема. Якщо функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена разом із своїми частинними похідними в деякому околі точки $A(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, причому змішані похідні другого порядку неперервні в цій точці, то значення цих похідних не залежать від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Приклад. Нехай $u = x^2 + y^2 + 3xy$. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y \quad \text{та} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 3x.$$

Змішані частинні похідні будуть такими:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 3 \quad \text{та} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 3.$$

Ми переконалися на прикладі в рівності змішаних частинних похідних другого порядку.

3.2. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ

Розглянемо $u = f(x, y, z)$ – функцію трьох незалежних змінних, яка є визначеною і диференційованою у деякій області. Головна, лінійна відносно Δx , Δy , Δz , частина приросту функції називається **повним диференціалом** du функції трьох змінних x, y, z :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz. \quad (3.1)$$

Добуток частинної похідної функції на диференціал відповідної незалежності змінної називають **частинним диференціалом функції** n незалежних змінних.

Таким чином, **повний диференціал функції** дорівнює сумі частинних її диференціалів.

При вивчені поведінки функції у даній точці простору особливий інтерес у фізиці викликає питання про напрям максимального зростання функції у даній точці. Вектор, модуль якого дорівнює найбільшій швидкості зростання функції $u = f(x, y, z)$ у даній точці P , а напрям співпадає з напрямом максимального зростання, називається **градієнтом функції**. Градієнт має своїм початком точку P , а проекціями – значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці P

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \quad (3.2)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори осей Ox, Oy і Oz відповідно.

Поняттям градієнта користуються при знаходженні екстремумів функцій багатьох змінних.

3.3. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛУ ФУНКІЇ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПОХИБОК

Коротко нагадаємо, що вимірювання бувають прямі і непрямі (опосередковані). У прямих вимірюваннях визначається сама шукана величина: температура – термометром, маса – терезами, час – секундоміром тощо. У непрямих вимірюваннях шукана величина знаходиться за допомогою розрахунку за іншими вимірюваними величинами. Наприклад, густина $\rho = \frac{m}{V}$ розраховується, маса m і об'єм V вимірюються. Прискорення $a = \frac{F}{m}$ розраховується за вимірюваними силою F і масою m .

Точність вимірювання характеризується похибкою. **Абсолютна похибка** – це різниця між вимірюваним x_i та точним значенням x_0 величини

$$\Delta x_i = |x_i - x_0|, i = 1, 2, \dots, n,$$

де n – номер вимірювання.

Відносна похибка – відношення абсолютної похибки до точного (істинного) значення вимірюваної величини:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Розрізняють три типи похибок: випадкові, систематичні, промахи. **Випадкові похибки** – це такі, які непередбачено змінюють свою величину та знак від досліду до досліду. **Систематичні похибки** – ті, які залишаються постійними або закономірно змінюються при повторному вимірюванні, зберігаючи свій знак, а, інколи, і значення. Причини: неточність мір та приладів, неправильне встановлення та градуування приладів, недосконалість методів вимірювання. **Промахи** – грубі похибки, які значно перевищують очікувані за даних умов. Причини: недбалий підрахунок, неправильне увімкнення приладів тощо.

Саме на подоланні ... труднощів і розвивається математика.

А. Я. Хінчин

Обмежимось розглядом випадкових похибок. Оскільки точне значення x_0 невідоме (якщо воно відоме, то нічого вимірювати), то за x_0 найчастіше приймають середнє арифметичне значення \bar{x}_0 :

$$\bar{x}_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Середня абсолютна похибка

$$\Delta \bar{x} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n}{n}$$

дорівнює середньому арифметичному значенню абсолютнох похибок окремих вимірювань.

Для знаходження похибок приріст функції замінюють її диференціалом (формула (2.5)).

Приклад. Припустимо, що величина u , яка обчислюється, є добутком двох вимірюваних величин x та y : $u = xy$. Знайдемо вираз для обчислення відносної похибки ε_u . У цьому випадку повний диференціал $du = u'_x dx + u'_y dy$.

Скориставшись наближеною рівністю $du \approx \Delta u$, матимемо: $\Delta u \approx u'_x dx + u'_y dy$.

Розділивши ліву і праву частину на $u = xy$, матимемо:

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}, \text{ або } \varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

Таким чином, для функції, яка є добутком двох (або більшої кількості) вимірюваних величин, максимальна відносна похибка дорівнює сумі максимальних відносних похибок.

На практиці при обчисленні похибок часто користуються готовими формулами. Деякі з них наведені в таблиці.

№	Обчислювана величина	Абсолютна похибка	Відносна похибка
1	$u = x \pm y$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x \pm y}$
2	$u = xy$	$x\Delta y + y\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
3	$u = \frac{x}{y}$	$\frac{y\Delta x + x\Delta y}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
4	$u = x^n$	$n x^{n-1} \Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$
5	$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x \ln x}$

Як видно з таблиці, у ряді випадків (2–4) при розрахунках зручніше спочатку обчислювати відносну похибку, а потім абсолютну, користуючись співвідношенням, отриманим безпосередньо з означення відносної похибки:

$$\Delta u = u_0 \varepsilon_u.$$

Для знаходження похибок у випадках, які не представлені у таблиці, спочатку обчислюють повний диференціал функції, а, потім, скориставшись наближеною рівністю $du \approx \Delta u$, знаходять абсолютну похибку. Знаки в доданках при цьому вибирають таким чином, щоб межа похибки була максимальною.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Знайти частинні похідні функції $z = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

Розв'язання. Розглядаючи u як постійну величину, знайдемо частинну похідну функції $z = f(x, y)$ за змінною x

$$z'_x = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \cdot \sin\left(\frac{2x}{y}\right)}.$$

Аналогічно знайдемо частинну похідну функції $z = f(x, y)$ за змінною y , при цьому незалежну змінну x вважатимемо константою,

$$z'_y = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2 \cdot \sin\left(\frac{2x}{y}\right)}.$$

2. При лікуванні деякого захворювання одночасно використовують два препарати. Реакція u (подана у відповідних одиницях деякого фізіологічного параметра) на x одиниць першого препарату та y одиниць другого має залежність:

$$u(x, y) = x^2 y^2 (a - x)(b - y),$$

де a та b – додатні константи; $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$.

Яка кількість другого препарату y викликає максимальну реакцію при фіксованій дозі першого?

Розв'язання. Знайдемо частинну похідну

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 (a - x) (2y(b - y) - y^2) = x^2 y (a - x) (2b - 3y).$$

Прирівнявши її до нуля, визначимо критичні точки: $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = \frac{2b}{3}$. Змісту даної задачі відповідає лише значення $y = \frac{2b}{3}$. Легко переконатись, що при вказаному значенні y функція має максимум, оскільки при переході через цю точку в напрямі зростання y , знак похідної змінюється з «+» на «-».

3. Знайти повний диференціал функції трьох незалежних змінних

$$u = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5.$$

Розв'язання. Вважаючи сталими u і x , знаходимо частинну похідну функції u за змінною x та аналогічним чином частинні похідні функції u за змінними y і z

$$u'_x = 3x^2 y^2 z + 2; \quad u'_y = 2x^3 y z - 3; \quad u'_z = x^3 y^2 + 1.$$

Повний диференціал функції визначаємо, користуючись формулою (3.1), тобто

$$du = (3x^2 y^2 z + 2)dx + (2x^3 y z - 3)dy + (x^3 y^2 + 1)dz.$$

4. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $A(1; 1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції z за змінними x та y і обчислимо їх значення у точці $A(1; 1)$:

$$z'_x = 2xy, \text{ а } z'_x(A) = 2xy = 2, \quad z'_y = x^2, \text{ а } z'_y(A) = x^2 = 1.$$

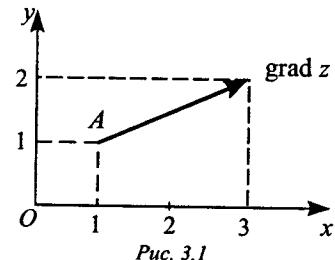


Рис. 3.1

Таким чином, згідно з (3.2) градієнт в т. $A(1; 1)$ дорівнює $\text{grad } z = 2\vec{i} + \vec{j}$ (рис. 3.1).

5. Знайти формулу для обчислення відносної похибки при визначені об'єму конуса, якщо вимірюються його лінійні розміри.

Розв'язання. Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Абсолютна похибка ΔV може бути замінена повним диференціалом:

$$\Delta V \approx dV = \frac{1}{3}\pi(2RHdR + R^2dH).$$

Враховуючи, що $\varepsilon_V \approx \frac{dV}{V}$, $dR = \Delta R$, а $dH = \Delta H$, знайдемо відносну похибку:

$$\varepsilon_V \approx \frac{dV}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi(2RHdH + R^2dR)}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{2dR}{R} + \frac{dH}{H} = 2\varepsilon_R + \varepsilon_H.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Реакція на ін'єкцію лікарського препарату масою x (мг) описується функцією

$$y = x^2(a - x)t e^{-t},$$

де y – деякий фізіологічний параметр; t – час, поданий у годинах; $a = \text{const}$. Знайти частинні похідні. Через який проміжок часу після ін'єкції, при заданій дозі препарату, реакція буде максимальною?

Знайти частинні похідні функцій.

2. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

3. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

4. $z = \frac{y}{x}$.

5. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

6. $z = x^y$.

7. $u = e^x \ln y$.

8. $z = y \ln x$.

9. $u = x \operatorname{tg} y$.

10. $z = e^{\frac{\sin y}{x}}$.

11. $z = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$.

12. $z = \arctg \frac{y}{x}$.

14. $u = z^x y$.

16. $u = \ln(x^2 y)$.

Знайти повні диференціали функцій.

18. $u = \ln(xy)$.

20. $z = x^2 y^3$.

22. $u = \sin(x - y)$.

24. $z = \sin^2 y + \cos^2 x$.

26. $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

28. $z = \frac{x}{y^2}$.

30. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

32. $z = \ln \cos^3(x^2 y^3)$.

13. $u = (xy)^z$.

15. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

17. $u = \sin \frac{x}{y^2 z}$.

19. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

21. $u = \cos \frac{x}{y}$.

23. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

25. $z = yx^y$.

27. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

29. $u = z \cdot x \cdot y$.

31. $u = \arctg \frac{xy}{z^2}$.

33. $u = \frac{5x + 3y}{9x - 2y}$.

Знайти градієнти функцій.

34. $\text{grad } z$ в точці $(5; 3)$, якщо $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

35. $\text{grad } z$ в точці $(1; 1)$, якщо $z = \ln x^2 y$.

36. Показати, що відносна похибка в 1 % при визначенні радіуса дає відносну похибку приблизно в 2 % при обчисленні площини круга і поверхні кулі.

37. Знайти вираз для відносної похибки величини $z = x^2 y^3$, якщо x і y знаходяться безпосередньо.



4.1. ПЕРВІСНА. НЕВІЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

У багатьох практичних задачах потрібно вміти знаходити функцію $f(x)$ за її похідною $f'(x)$, тобто виконувати операцію, обернену до диференціювання, наприклад:

1) знайти закон, за яким змінювалась швидкість $v(t)$, якщо залежність зміни прискорення від часу $a(t)$ відома. Шуканою функцією буде така $v(t)$, для якої $a = \frac{dv}{dt}$;

2) знайти закон руху $s(t)$ матеріальної точки за відомою залежністю зміни швидкості від часу; як відомо $v(t) = \frac{ds}{dt}$.

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо $F(x)$ має свою похідну функцію $f(x)$ або своїм диференціалом $f(x)dx$, тобто

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Теорема про існування первісної. Кожна функція, що має первісну, має нескінченну кількість первісних, які відрізняються одна від одної на постійний доданок.

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з п. 5 правил диференціювання.

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для даної функції $y = f(x)$ називають **невизначенним інтегралом** функції $f(x)$.

Символ невизначеного інтеграла: $\int f(x)dx$. Згідно з означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; \int – знак інтеграла, x – змінна інтегрування.

4.2. ВЛАСТИВОСТІ НЕВІЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. Постійний множник можна винести за знак інтеграла;

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx.$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа інтегровних функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів цих функцій:

$$\int (f(x) \pm \phi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \phi(x)dx.$$

3. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

Ця властивість дозволяє перевіряти правильність виконання операції інтегрування.

4. Невизначений інтеграл від диференціала неперервної диференційованої функції дорівнює, з точністю до сталого доданка, самій цій функції:

$$\int d\phi(x) = \phi(x) + C.$$

5. Якщо дві функції (або два диференціали) тотожно рівні, то їхні первісні можуть відрізнятися лише постійним доданком.

4.3. ТАБЛИЦЯ НАЙПРОСТИШІХ ІНТЕГРАЛІВ

Відомі нам формули для похідних дають таблицю невизначених інтегралів. Щоб перевірити будь-яку з наведених в таблиці формул, досить знайти похідну правої частини.

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$14. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \ln |\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$$

4.4. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Безпосереднє інтегрування – інтегрування, котре проводиться за допомогою таблиць без додаткових перетворень. В окремих випадках використовують *метод розкладання*, який базується на поданні підінтегральної функції через суму функцій, кожна з яких є таблично.

$$\text{Приклад. } \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x - 2 \arctg x + C.$$

2. Інтегрування підстановкою (заміна змінної). Зміст цього методу полягає в тому, що в інтегралі $\int f(x) dx$ виконується заміна змінної $x = \varphi(t)$, тобто вводиться нова змінна t замість x . Дістають диференціал $dx = \varphi'(t)dt$. Тоді початковий інтеграл записується у вигляді:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Якщо підстановка (заміна змінної) вдала, то другий інтеграл легко визначається. Досить часто (у простих випадках) для введення нової змінної вибирають деяку функцію, що входить у підінтегральний вираз: $t = z(x)$. Це доцільно, якщо множник dt також входить у підінтегральний вираз.

Проялюструємо таку заміну прикладом.

$$\text{Приклад. } \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

При цьому кажуть, що $\sin x$ підвели під знак диференціалу.

3. Інтегрування частинами. Розглянемо дві неперервні (диференційовані) функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Утворимо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Звідси

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du,$$

або

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (4.1)$$

Таким чином, інтеграл $\int u dv$ зводиться до інтеграла $\int v du$, який часто обчислюється більш просто.

$$\text{Приклад. } \int \frac{x \cos x dx}{u} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

При *інтегруванні тригонометричних функцій* інтеграли виду $\int \cos^m x \sin^n x dx$, де m та n натуральні числа, обчислюють залежно від парності чи непарності степеня. Якщо m та n парні, то користуються формулами зниження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Якщо n або m – непарне, то використовують заміну змінної

$$t = \sin x \text{ при } m \text{ непарному,}$$

$$t = \cos x \text{ при } n \text{ непарному.}$$

При *інтегруванні ірраціональних функцій* деякі інтеграли від ірраціональних функцій можна звести до інтегралів від раціональних функцій за допомогою таких підстановок:

$$1) \int R(x, \sqrt[m]{ax+b}) dx \rightarrow ax+b=t^n;$$

$$2) \int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}) x^{m-1} dx \rightarrow ax^m+b=t^n;$$

$$3) \int R(x, \sqrt[n]{a^2-x^2}) dx \rightarrow x=a \sin t;$$

$$4) \int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx \rightarrow x=a \operatorname{tg} t.$$

4.5. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розглянемо плоску фігуру (криволінійну трапецію), яка обмежена графіком додатної неперервної функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком $[a, b]$ осі Ox . Знайдемо площею цієї трапеції. Для цього розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n елементарних відрізків $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ (рис. 4.1). Розглянемо заштриховану фігуру (прямокутник з основою Δx), її площа:

$$S_i = f(\bar{x}_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\bar{x}_i)\Delta x,$$

де \bar{x}_i – довільна точка інтервалу Δx_i ; $f(\bar{x}_i)$ – значення функції у цій точці.

Загальна площа всіх прямокутників з основою Δx дорівнює сумі

$$\sum_{i=0}^n f(\bar{x}_i)\Delta x.$$

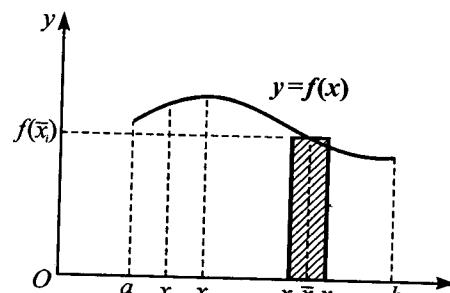


Рис. 4.1

Ця величина буде тим точніше визначати площину криволінійної трапеції, чим менше Δx . Точне значення площини дается границею:

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Величина $\sum_{i=0}^n f(\bar{x}_i) \Delta x$ називається інтегральною сумаю, або сумаю Дарбу.

Наведемо визначення. Якщо границя інтегральної суми $\sum_{i=0}^n f(\bar{x}_i) \Delta x$ існує при всіх $\Delta x \rightarrow 0$, то ця границя називається **визначенням інтегралом** від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається символом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x,$$

де a – нижня межа; b – верхня межа; $f(x)$ – підінтегральна функція.

Якщо $f(x) < 0$, то $S = -\int_a^b f(x) dx$. Знак “–” стоїть тому, що $S \geq 0$.

4.6. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_b^a Af(x) dx = A \int_b^a f(x) dx.$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми інтегровних функцій дорівнює сумі визначених інтегралів кожного з доданків:

$$\int_b^a [f(x) \pm g(x)] dx = \int_b^a f(x) dx \pm \int_b^a g(x) dx.$$

3. Інтеграл по відрізку дорівнює сумі інтегралів по його частинах:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

де $a < c < b$.

4. **Теорема про середнє.** Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то у межах $[a, b]$ існує точка c така, що

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Геометричний зміст цієї теореми: площину криволінійної трапеції можна вирізти через площину прямокутника з тією ж основою, що й трапеція, і стороною, яка дорівнює значенню підінтегральної функції при деякому проміжному значенні аргументу.

Ця теорема дозволяє знаходити середнє значення будь-якої величини, що є функцією. Наприклад, як відомо, середня швидкість \bar{v} дорівнює відношенню шляху, пройденого тілом, до затраченого часу:

$$\bar{v} = \frac{s(t)}{\Delta t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt}{t_2 - t_1}.$$

5. При перестановці меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Цю властивість легко зрозуміти, якщо скористатись теоремою про середнє та взяти до уваги, що: $(b - a) = -(a - b)$.

6. Похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею t по цій межі дорівнює підінтегральній функції при значенні змінної, рівному значенню верхньої межі ($x = t$):

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t).$$

Таким чином, інтеграл зі змінною верхньою межею є однією з первісних для підінтегральної функції.

4.7. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

Означення визначеного інтеграла як границі суми, наведене в п. 4.5, дозволяє зрозуміти роль інтеграла при розв'язанні задач: на обчислення площини, обмеженої кривою $y = f(x)$; шляху, пройденого тілом; роботи змінної сили тощо. Але це означення не дає зручного способу знаходження інтеграла у вигляді функцій меж інтегрування.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на цьому відрізку, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Не все те невірне, що тобі незрозуміле.
Г. Сковорода

Ця формула називається **формулою Ньютона–Лейбніца** і встановлює зв'язок між визначенним та невизначенним інтегралом.

Доведення. Знаючи, що $\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$, знайдемо C . Прийнявши $t = a$, матимемо $\int_a^a f(x)dx = 0$. Звідси $F(a) + C = 0$, $C = -F(a)$. Отже,

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a).$$

Перейдемо до визначеного інтеграла, прийнявши $t = b$. Остаточно будемо мати

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a). \quad (4.2)$$

Потрібно всіма засобами навчати мистецтву доведень, не забуваючи при цьому мистецтво згадок.

Д. Пойа

Таким чином, задача обчислення визначеного інтеграла зводиться до знаходження первісної (тобто невизначеного інтеграла);

потім обчислюється значення первісної при $x = b$ і $x = a$ і знаходиться різниця цих значень.

Приклад. У деяких діагностичних методиках користуються препаратами з ізотопними індикаторами. Швидкість зміни концентрації C такого препарату в організмі з пливом часу описується законом:

$$\frac{dC}{dt} = K e^{-t},$$

де K – константа в умовах експерименту. Знайти зміну концентрації препарату за час $t = 0,5$ год.

Розв'язання. Шукана зміна концентрації виразиться інтегралом:

$$C = K \int_0^{0,5} e^{-t} dt.$$

Знайдемо первісну і скористаємо формулою Ньютона–Лейбніца (4.2)

$$C = -K(e^{-0,5} - e^0) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

4.8. ДЕЯКІ ФІЗИЧНІ, БІОФІЗИЧНІ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Визначеній інтеграл використовують не тільки в математиці, а й у різних прикладних науках. За його допомогою обчислюють площини фігур, довжини ліній, об'єми тіл довільної форми, роботу змінної сили, швидкість, шлях, знаходить центр мас, центр інерції.

Нижче наведені деякі приклади **фізичного, біофізичного та геометричного застосування визначеного інтеграла**.

Робота змінної сили. Відома з шкільного курсу формула роботи, яка виражається добутком проекції сили на переміщення, справедлива лише у випадку дії постійної сили. Якщо сила є змінною, то потрібно розглядати настільки малі проміжки шляху, щоб силу можна було вважати постійною:

$$\Delta A_i = F_i \Delta x \text{ або } dA = F(x)dx.$$

В загальному випадку робота змінної сили

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx. \quad (4.3)$$

Цю формулу можна подати іншим чином. Оскільки $dx = \frac{dx}{dt} dt = v dt$, то

матимемо

$$A = \int_{t_1}^{t_2} Fv dt. \quad (4.4)$$

Добуток Fv , який входить в цю формулу, є потужністю W , тому можна формулу для роботи записати і так:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} W dt.$$

Зауважимо, що для того, щоб обчислити роботу по наведених вище формулах, потрібно знати залежність координати від часу $x(t)$ та вираз для сили, яка може бути подана як функція або часу, або координати, або швидкості.

Чисельність популяції. Якщо відома швидкість росту популяції $v(t) = \frac{dN}{dt}$, то можна знайти приріст чисельності популяції ΔN за певний проміжок часу $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta N = N(t) - N(t_0) = \int_{t_0}^t v(t)dt.$$

Наприклад, відомо, що швидкість росту популяції пеніцилінових грибків при необмеженості ресурсів живлення описується експоненціальним законом $v = a e^{kt}$. Знайдемо приріст такої популяції за деякий проміжок часу $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta N = \int_{t_0}^t a e^{kt} dt = \frac{a}{k} e^{kt} \Big|_{t_0}^t = \frac{a}{k} (e^{kt} - e^{kt_0}).$$

Очевидно, що $N_0 = \frac{a}{k} e^{kt_0}$ – чисельність популяції в момент часу t_0 .

Обчислення об'єму тіла. Розглянемо випадок, коли тіло утворене обертанням деякої кривої $y = f(x)$ навколо осі Ox в межах зміни x від a до b (рис. 4.2). Розділимо тіло площинами, перпендикулярними до Ox , на достатньо велику кількість шарів n . Кожен із шарів можна розглядати як циліндр з основою S та висотою $\Delta x = dx$, тоді об'єм шару $dV = Sdx$. Площу основи S можна подати як $S = \pi f^2(x)$. Об'єм тіла

$$V = \int_a^b S dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Як приклад, розглянемо тіло, утворене обертанням гілки параболи $x = y^2$ навколо осі Ox . Таке тіло називають параболоїдом обертання. Обчислимо об'єм сегмента параболоїда за умови, що $x \in (0; 2)$. Згідно з отриманою формулою

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^2 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2\pi.$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $x = \varphi(y)$, обмеженої прямими $y = c$, $y = d$ при $c < y < d$, навколо осі Oy :

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Наведемо без доведення деякі інші застосування визначеного інтеграла в геометрії.

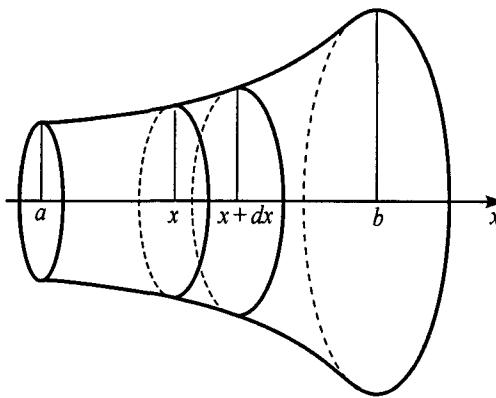


Рис. 4.2

Довжина дуги плоскої неперервної кривої $y = f(x)$, яка обмежена прямими $x = a$, $x = b$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Площа поверхні, утвореної обертанням кривої $y = f(x)$, яка обмежена прямими $x = a$, $x = b$, навколо осі Ox :

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Площа поверхні, утвореної обертанням кривої $x = \varphi(y)$, яка обмежена прямими $y = c$, $y = d$, навколо осі Oy :

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (x')^2} dy.$$

4.9. НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛ

Якщо проміжок інтегрування нескінчений або функція необмежена, то використовують поняття невласного інтеграла.

Припустимо, що функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a, \infty[$.

Розглянемо інтеграл $\int_a^b f(x) dx$. Границю

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

називають **невласним інтегралом першого роду** і позначають:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [F(b) - F(a)].$$

Якщо вказана границя існує, то кажуть, що невласний інтеграл збігається, якщо ж границя не існує або нескінчenna, то розбігається.

Аналогічно можна означити і невласний інтеграл першого роду для випадку, коли нижня межа $a \rightarrow -\infty$. Тобто невласний інтеграл першого роду – це інтеграл із нескінченною верхньою або нижньою межею (рис. 4.3).

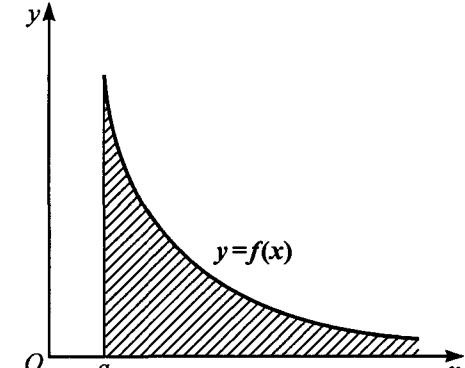


Рис. 4.3

$$\text{Приклади. 1. } \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_1^\infty x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^\infty = \frac{-1}{\infty} + \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{2. } \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = -e^{-\infty} + e^0 = 1.$$

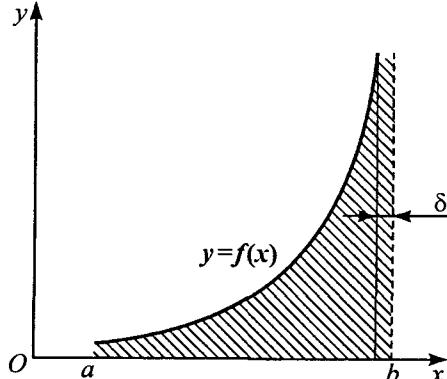


Рис. 4.4

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна при $a \leq x < b$ і необмежена в будь-якому δ-околі точки $x = b$ (рис. 4.4). Границю

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$$

називають **невласним інтегралом другого роду** від функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$.

Якщо ця границя скінчена, то невласний інтеграл є збіжним, якщо нескінчена чи не існує, то

інтеграл розбігається.

Аналогічним є означення невласного інтеграла для функцій, необмежених ліворуч, тобто визначених і неперервних при $a < x \leq b$.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$ за винятком точки $c \in [a, b]$, в околі якої вона необмежена. Тоді невласний інтеграл цієї функції можна подати як суму невласних інтегралів на проміжках $[a, c]$ і $[c, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Цей інтеграл збігається, якщо збігаються обидва доданки.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Обчислити невизначений інтеграл

$$\int (6x^3 + x - 1) dx.$$

Розв'язання. Використовуючи властивості 1 і 2 невизначеного інтеграла, даний інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int (6x^3 + x - 1) dx = 6 \int x^3 dx + \int x dx - \int 1 dx.$$

Використавши формулу 1 з таблиці невизначених інтегралів, отримаємо

$$\int (6x^3 + x - 1) dx = \frac{3}{2} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - x + C.$$

2. Обчислити інтеграл $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Розв'язання. Припустивши, що $t = \sin x$, знайдемо $dt = \cos x dx$, тоді підінтегральний вираз набере вигляду: $\sin^2 x \cos x dx = t^2 dt$.

$$\text{Отже, } \int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

3. Обчислити інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

Розв'язання. Обчислимо цей інтеграл методом інтегрування по частинах. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді добутку двох спів множників – функцій $u = \ln x$ і $dv = x^3 dx$. Тоді $du = \frac{dx}{x}$; $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. Використавши формулу (4.1), отримаємо:

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{x^4}{4x} dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$.

Розв'язання. Справедлива тотожність

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}.$$

За її допомогою отримаємо

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right).$$

Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} &= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x-b} \right) = \frac{1}{a-b} (\ln|x-a| - \ln|x-b|) + C = \\ &= \frac{1}{a-b} \ln \frac{x-a}{x-b} + C. \end{aligned}$$

5. Дослідити функцію $y = \int e^{-x^2} dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл не може бути поданий через скінченне число елементарних функцій (доведення через складність наводити не будемо). Однак, цей інтеграл є функцією, властивості якої можна дослідити. З означення первісної видно, що $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}$.

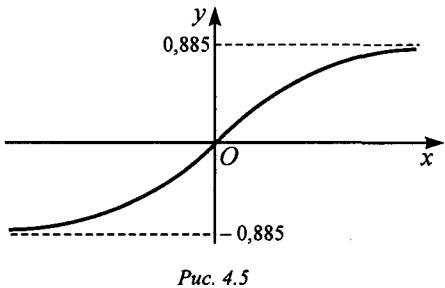


Рис. 4.5

Оскільки $e^{-x^2} > 0$ для будь-яких x , то $y(x)$ – зростаюча функція. Друга похідна $\frac{d^2y}{dx^2} = -2x e^{-x^2}$ дорівнює нулю при $x = 0$. Легко переконатись, що ця точка є точкою перегину. Графік функції $y = \int_0^x e^{-t^2} dt$ подано на рис. 4.5

(для визначеності нижня межа вибрана рівною нулю). Для знаходження значень цієї функції складені спеціальні таблиці. Більш докладно з цими таблицями ознайомимося в наступних розділах.

6. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

Розв'язання. Знаходимо первісну

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x.$$

Використаємо формулу Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

Зрозуміла математика завжди гарна.
П. Коен

Скориставшись властивістю 5 визначеного інтеграла поміняємо місцями нижню і верхню межі інтегрування і змінимо при цьому знак перед інтегралом

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 = \frac{1}{2} \left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

7. Обчислити $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

Розв'язання. Знайдемо первісну, використавши заміну змінної $\ln x = t$, $dt = \frac{dx}{x}$. При цьому доведеться змінити і межі інтегрування. Нижня межа $t_1 = \ln x_1 = \ln 1 = 0$. Верхня межа $t_2 = \ln x_2 = \ln e = 1$.

Отримаємо

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

8. Обчислити $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Розв'язання. Використаємо підстановку $x = \sin t$, тоді $dx = \cos t dt$. При заміні змінної у визначеному інтегралі потрібно замінити і межі інтегрування. Нижня межа $t_1 = \arcsin 0 = 0$, а верхня $t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

9. Визначити роботу сил електричного поля, створеного точковим зарядом Q , по переміщенню іншого точкового заряду q з точки A , яка знаходиться на відстані r_1 від Q , в точку B , яка знаходиться на відстані r_2 від Q .

Розв'язання. В даному випадку сила F визначається за законом Кулона і є функцією координати

$$F(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

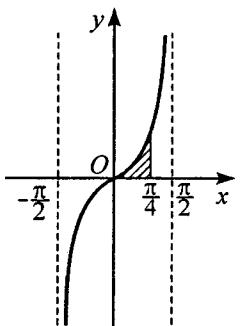
Для досить малого переміщення від r_i до $r_i + \Delta r$ можна записати

$$\Delta A_i = F(r_i) \Delta r_i.$$

Вся робота наближено обчислюється інтегральною сумою

$$A = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} F(r_i) \Delta r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де $\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$; $\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$.



Rис. 4.6

10. Обчислити площину фігури, обмеженої графіком функції $y = \operatorname{tg} x$, віссю Ox і прямую $x = \frac{\pi}{4}$ (рис. 4.6).

Розв'язання. Площину шуканої фігури (на рис. 4.6 вона заштрихована) можна знайти як $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$.

Обчислимо первісну методом заміни змінної, позначивши $t = \cos x$, тоді $dt = -\sin x dx$:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = - \int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|.$$

Скориставшись формuloю Ньютона–Лейбніца, маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln|\cos 0| - \ln\left|\cos \frac{\pi}{4}\right| = 0 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Користуючись таблицею інтегралів і перетворенням підінтегральних виразів, знайти.

1. $\int (3x^2 + \frac{2}{x^5}) dx$.

2. $\int (4 \sin x + 4x - 2) dx$.

3. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$.

4. $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx$.

5. $\int (x^2 - 3)^3 dx$.

6. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$.

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

8. $\int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$.

9. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

10. $\int \cos 2x dx$.

11. $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

12. $\int \frac{2x + 3}{2x + 1} dx$.

13. $\int \frac{1}{a-x} dx$.

14. $\int \frac{6x^3 + x^2 - 2x}{2x-1} dx$.

15. $\int \frac{x^2 + 5x + 7}{x+3} dx$.

16. $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$.

Знайти інтеграли методом заміни змінної.

17. $\int \sin^3 x dx$.

18. $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$.

19. $\int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}} dx$.

20. $\int \frac{x^2}{x^2 + 2} dx$.

21. $\int \frac{x}{\sqrt{2+3x^2}} dx$.

22. $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} dx$.

23. $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 1} dx$.

24. $\int x^2 \sin 3x^3 dx$.

25. $\int \sin^5 x \cos x dx$.

26. $\int e^{\cos x} \sin x dx$.

27. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$.

28. $\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x}$.

29. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

30. $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

31. $\int \frac{x}{3+2x^2} dx$.

Знайти інтеграли методом інтегрування по частинах.

32. $\int x \ln x dx$.

33. $\int e^x \cos x dx$.

34. $\int \ln x dx$.

35. $\int x^2 \sin 2x dx$.

36. $\int x e^{-x} dx$.

37. $\int x \sin x dx$.

38. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

39. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

40. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, знайти інтеграли.

41. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

42. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$.

$$43. \int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx .$$

$$44. \int_2^3 \sqrt{x-2} dx .$$

$$45. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx .$$

$$46. \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx .$$

$$47. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx .$$

$$48. \int_1^2 \frac{x^3 dx}{3+x^4} .$$

$$49. \int_e^{2e} \frac{dx}{x \ln x} .$$

$$50. \int_1^2 \frac{x^2 - 4x^3 + x}{x^2} dx .$$

$$51. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx .$$

$$52. \int_1^{10} \frac{\ln^3 x dx}{x} .$$

$$53. \int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + d}} .$$

$$54. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx .$$

Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

$$55. y = \frac{x^2}{2}; x = 1; x = 3 \text{ i віссю абсцис.} \quad 56. y = 4x - x^2 \text{ i віссю абсцис.}$$

$$57. y = \sin x; \quad x = 0; \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

$$58. y = \operatorname{tg} x; \quad x = \frac{\pi}{3} \text{ i віссю абсцис.}$$

$$59. y = x^2; \quad y = 2 - x^2.$$

$$60. y = \ln x; \quad y = 0; \quad x = 0.$$

$$61. y = e - x; \quad y = 0; \quad x = 1; \quad x = 2.$$

$$62. y = 2^x; \quad y = 2; \quad x = 0.$$

$$63. y = 2x - x^2; \quad y = x.$$

$$64. y = x^3; \quad x = 2; \quad x = 3.$$

65. Знайти приріст чисельності популяції за проміжок часу від t_1 до t_2 , якщо швидкість приросту визначається формулою $V(t) = C e^{kt}$, де C і k – величини сталі в умовах задачі.

66. Знайти об'єм рідини, яка протікає по трубі радіуса R за 1 с. Залежність швидкості рідини від відстані до осі труби r задається формулою:

$$V = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4l\eta} .$$

Примітка. $\frac{P_1 - P_2}{4l\eta}$ – константа.

67. Знайти середні значення функцій:

- a) $f(x) = \sin x$ на відрізку $[0; \pi]$;
- б) $f(x) = \sin^2 x$ на відрізку $[0; \pi]$;
- в) $f(x) = \ln x$ на відрізку $[1; e]$;
- г) $f(x) = x^2$ на відрізку $[0; b]$.

68. В момент часу t швидкість зміни концентрації препарату з ізотопним індикатором $c' = e^{-t \ln 2}$. Знайти концентрацію в момент часу t .

69. Знайти роботу, затрачену на розтягування пружини еспандера на 60 см, якщо при зусиллі 15 Н еспандер розтягається на 2 см.

70. Знайти кількість теплоти, яка виділяється в провіднику опором 2 Ом за 1 хв при проходженні струму $I = 10 \sin 100\pi t$.

71. Знайти площину фігури між параболою $y = x^2 + 2$ та прямою $x + y = 4$.

5.1. ПОНЯТТЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальні рівняння є одним з головних інструментів сучасної теорії моделювання, керування, прийняття рішень. Їх використовують у найрізноманітніших задачах науки та техніки. Вперше в біології диференціальні рівняння з'явилися у XVIII ст. і були використані для моделювання процесів розвитку популяцій. На сьогодні теорія диференціальних рівнянь активно використовується в імунології, радіології, епідеміології, фармації та інших галузях медичної науки.

Диференціальним називається рівняння, в яке, крім функції y і незалежної змінної x , входять похідні функції y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ або її диференціали. Загальний вигляд диференціального рівняння у випадку функції однієї змінної:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Найвищий порядок похідної, яка входить до диференціального рівняння, називають **порядком диференціального рівняння**.

Диференціальне рівняння називається **лінійним**, якщо невідома функція y та її похідні y' , y'' , ... входять у рівняння тільки в першому степені.

У випадку функції однієї змінної ($y = f(x)$) рівняння називають **звичайним диференціальним рівнянням**. У випадку двох ($y = f(x_1, x_2)$) і більше змінних рівняння називають **диференціальним рівнянням у частинних похідних**.

Найбільш поширені у фізиці диференціальні рівняння в частинних похідних:

1. **Рівняння дифузії** (вважаємо, що концентрація речовини є функцією часу і координати $c = f(t, x)$):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

де D – коефіцієнт дифузії.

2. **Рівняння тепlopровідності**:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

де χ – коефіцієнт температуропровідності; $T = f(x, t)$ – температура.

3. **Рівняння гармонічних коливань**:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s,$$

де ω – власна частота, s – зміщення від положення рівноваги.

4. Хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

де $s = f(x, t)$ – зміщення, v – швидкість поширення хвилі.

Надалі будемо розглядати звичайні лінійні диференціальні рівняння.

Розв'язком звичайного диференціального рівняння n -го порядку називається кожна функція $y = f(x)$, підстановка якої разом з її похідними перетворює це рівняння в тотожність. Процедуру знаходження розв'язків диференціального рівняння називають **інтегруванням** цього рівняння.

5.2. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лінійне диференціальне рівняння n -го порядку має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = b(x),$$

де y – шукана функція; $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ – відомі функції незалежної змінної, їх ще називають **коефіцієнтами диференціального рівняння**. Якщо коефіцієнти при невідомій функції y та її похідних не залежать від x , тобто є константами, то рівняння називається диференціальним рівнянням з **постійними коефіцієнтами**. У протилежному випадку – диференціальне рівняння зі **змінними коефіцієнтами**.

Рівняння, в якому $b(x) \neq 0$, називається **неоднорідним**, якщо ж $b(x) = 0$, то рівняння – **однорідне**.

У відповідність однорідному диференціальному рівнянню можна поставити рівняння відносно деякої невідомої λ

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (5.1)$$

яке називають **характеристичним** для даного диференціального рівняння. Якщо λ – корінь характеристичного рівняння, то $y = e^{\lambda x}$ – розв'язок диференціального рівняння.

Теорема. Якщо $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_k = \varphi_k(x)$ – розв'язки однорідного рівняння, то будь-яка їхня лінійна комбінація

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k$$

також є розв'язком цього однорідного рівняння, C_1, C_2, \dots, C_k – константи.

Кожному дійсному кореню кратності m відповідає набір лінійно незалежних розв'язків:

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}, \dots, \quad y_m = x^m e^{\lambda x}.$$

Кожній парі комплексно-спряжених коренів $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратності m відповідає набір розв'язків:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, \quad x^m e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, \quad x^m e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Сукупність лінійно незалежних розв'язків, кількість функцій в якій дорівнює порядку диференціального рівняння, називають *фундаментальним набором розв'язків* лінійного диференціального рівняння.

Нагадаємо, що система функцій називається *лінійно незалежною*, якщо ні одна з них не може бути подана у вигляді лінійної комбінації інших функцій.

Розв'язати диференціальне рівняння – означає знайти всі його розв'язки. Сукупність усіх розв'язків даного диференціального рівняння називають *загальним розв'язком* цього рівняння.

Загальний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, який є лінійною комбінацією фундаментального набору розв'язків:

$$y = \sum_{i=1}^n C_i y_i,$$

де C_1, C_2, \dots, C_n – довільні константи; y_i – лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння.

Отже, *загальний розв'язок диференціального рівняння n-го порядку* – це функція $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка перетворює це рівняння в тотожність при будь-яких значеннях констант C_1, C_2, \dots, C_n .

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = 0$. Це рівняння має розв'язки

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = 3\sin x, \quad y_3 = \cos x.$$

Легко переконатись, що перший та другий розв'язки не утворюють фундаментальну систему, а перший та третій – утворюють.

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' - 2y'' + 2y' - 2y + 1 = 0$.

Цьому рівнянню відповідає характеристичне

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

або

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda^2 + 1) = 0,$$

яке має корені $\lambda_{1,2} = 1$ та $\lambda_{3,4} = \pm i$. Кореню $\lambda = 1$ кратності 2 відповідають розв'язки $y_1 = e^x$ та $y_2 = xe^x$. Парі комплексно-спряжених коренів $\lambda_{3,4} = \pm i$ відповідають розв'язки $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$.

Загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні константи.

Однак не завжди загальний розв'язок отримується в явному вигляді. Іноді він визначається рівнянням виду

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (5.2)$$

У такому разі рівняння (5.2) називають загальним інтегралом диференціального рівняння. Розв'язати диференціальне рівняння – це значить знайти його загальний розв'язок у тому чи іншому вигляді.

Розв'язок, який отримується із загального при деяких фіксованих значеннях констант C_1, C_2, \dots, C_n , називають *частинним розв'язком*.

5.3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальне рівняння першого порядку має загальний вигляд

$$y' = f(x, y) \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (5.3)$$

Його загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, C), \quad (5.4)$$

де C – деяка константа.

Загальний інтеграл з визначенним числовим значенням константи C називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння. Якщо функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння першого порядку, то її графік називають інтегральною кривою даного диференціального рівняння. Рівність (5.4) можна розглядати як рівняння сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння першого порядку.

Справедлива теорема про існування єдиного частинного розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$.

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в деякій області, то існує в даній області єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, для якого справедливо: якщо $x = x_0$, то $y = y_0$.

Геометричний зміст цієї теореми полягає в тому, що існує, причому єдина, функція $y = \varphi(x, C)$, яка є розв'язком даного диференціального рівняння, така, що її графік проходить через точку (x_0, y_0) . Умова, згідно з якою при $x = x_0$ функція y набуває значення y_0 , називається *початковою умовою*. Початкова умова дозволяє визначити константу C і знайти частинний розв'язок диференціального рівняння.

Математика – наука молодих. Інакше і бути не може. Вивчення математики – це така гімнастика розуму, для якої потрібна вся гнучкість та витривалість молодості.

Н. Вінер

Розглянемо методи розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Рівняння, якому можна надати вигляду

$$f_1(x)f_2(y) dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y) dy = 0, \quad (5.5)$$

називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**.

Поділивши його почленно на добуток $f_2(y)\varphi_1(x)$ (вважаємо, що він не дорівнює нулю), одержимо:

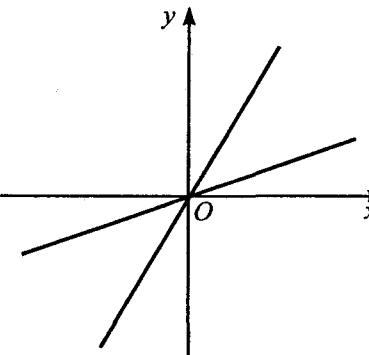
$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{f_2(y)}{\varphi_2(y)} dy = 0.$$

Змінні x і y відокремлені. Загальний інтеграл такого рівняння має вигляд:

$$F_2(y) + F_1(x) = C, \quad (5.6)$$

де F_1 та F_2 – первісні функції $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ та $\frac{f_2(y)}{\varphi_2(y)}$ відповідно. З використанням початкової умови $x = x_0$, $y = y_0$ можна отримати частинний розв'язок цього рівняння:

$$F_2(y_0) + F_1(x_0) = F_1(x_0) + F_2(y_0).$$



Rис. 5.1

Рівняння називається **однорідним рівнянням першого порядку**, якщо функцію $f(x, y)$ можна подати як функцію відношення своїх аргументів: $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Тобто рівнянню (5.3) можна надати вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (5.7)$$

Однорідне диференціальне рівняння за допомогою підстановки $u = \frac{y}{x}$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, здиференціюємо рівняння $y = xu$:

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

підставивши в (5.7), матимемо:

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

або

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}. \quad (5.8)$$

Щоб отримати загальний розв'язок однорідного рівняння, потрібно зінтегрувати (5.8) і виконати зворотну заміну $u = \frac{y}{x}$.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $2x^2y' = y^2 + 5x^2$.

Розділивши ліву і праву частини на x^2 , отримаємо

$$2y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5.$$

Отже, дане лінійне рівняння є однорідним. Прийнявши $y = xu$, одержимо

$$2u + 2xu' = u^2 + 5$$

або

$$2xu' = u^2 - 2u + 5.$$

Відокремимо змінні

$$\frac{2du}{u^2 - 2u + 5} = \frac{dx}{x}$$

і отримаємо після інтегрування

$$\operatorname{arctg} \frac{u-1}{2} = \ln|x| + C \text{ або } u = 1 + 2 \operatorname{tg}(\ln|x| + C).$$

Повернемося до змінної y :

$$y = x + 2x \operatorname{tg}(\ln|x| + C).$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку мають вигляд

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (5.9)$$

Будемо вважати, що функції $p(x)$ та $q(x)$ неперервні в деякому інтервалі $(a; b)$. Якщо $q(x) = 0$, то рівняння однорідне і є рівнянням з відокремлюю-

ваними змінними. Неважко переконатись, що його загальним розв'язком є функція:

$$y = C e^{-\int p(x)dx}. \quad (5.10)$$

Якщо ж $q(x) \neq 0$, то рівняння (5.9) неоднорідне. Для його розв'язування скористаємося підстановкою:

$$y = u(x) \cdot v(x). \quad (5.11)$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – невідомі диференційовні функції в інтервалі $(a; b)$. На перший погляд здається, що, замінюючи одну невідому функцію $y(x)$ двома невідомими $u(x)$ та $v(x)$, тільки ускладнюємо задачу. Але це не так. Адже вибором однієї з функцій $u(x)$ або $v(x)$ можна розпорядитись так, як буде зручно. Справді, підставивши функцію (5.11) в (5.9), дістанемо

$$u'v + u(v' + pv) = q. \quad (5.12)$$

Візьмемо функцію v такою, щоб

$$v' + pv = 0. \quad (5.13)$$

Рівняння (5.13) є лінійним однорідним. Його загальний розв'язок має вигляд

$$v = C e^{-\int p(x)dx}.$$

Взявши в значенні функції v одну з таких функцій, наприклад, $v = e^{-\int p(x)dx}$, підставимо її в рівняння (5.12), яке може бути записане з урахуванням (5.13) у вигляді:

$$v \frac{du}{dx} = q. \quad (5.14)$$

Після відокремлення змінних дістанемо:

$$du = \frac{q}{v} dx.$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx + C = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Оскільки $y = u(x)v(x)$, то загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (5.9) має вигляд

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right). \quad (5.15)$$

Безумовно, загальним розв'язком неоднорідного рівняння (5.9), як і загальним розв'язком відповідного однорідного, є функції, визначені на всьому інтервалі $(a; b)$.

5.4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В БІОЛОГІЇ ТА МЕДИЦИНІ

Моделі розвитку популяцій. Однією з важливих проблем екології є динаміка чисельності популяції. Розглянемо колонію мікроорганізмів, яка існує в умовах необмежених ресурсів живлення. Швидкість зміни популяції $\frac{dN}{dt}$ є прямо пропорційною до її чисельності N :

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N.$$

Це рівняння в 1802 р. вперше отримав Мальтус. Загальний розв'язок цього однорідного рівняння має вигляд

$$N = C e^{\gamma t}.$$

З початкових умов: $t = t_0$, $N(t_0) = N_0$, матимемо

$$C = N_0 e^{-\gamma t_0}.$$

Частинний розв'язок має вигляд

$$N = N_0 e^{\gamma(t-t_0)}.$$

Отримане рівняння свідчить, що з часом N зростає необмежено за експоненціальним законом. В жодній з реально існуючих популяцій це не реалізується, оскільки в природних умовах не виконуються вихідні припущення: необмеженість ресурсів живлення, відсутність впливу інших видів. Таким чином, *рівняння Мальтуса* можна застосувати лише до штучно створених популяцій, наприклад, популяції пеніцилінових грибків, дріжджових бактерій.

Точніше описує розвиток популяції *рівняння Ферхюльста–Перла*, отримане в 1845 р. Будемо, як і раніше, вважати, що середня народжуваність у розрахунку на одну особину є сталою γ , яка не залежить ні від часу, ні від розміру популяції. Рівняння Ферхюльста–Перла враховує також “фактор самоотруєння”, який зменшує швидкість росту популяції: смертність є пропорційною до розміру популяції, тобто дорівнює δN (δ – коефіцієнт самоотруєння). Величина δ визначається багатьма факторами: поширенням інфекцій, конкурентною боротьбою за їжу тощо. Таким чином, швидкість

росту популяції в розрахунку на одну особину $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ дорівнює різниці між народжуваністю γ і смертністю δN :

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \gamma - \delta N$$

або

$$\frac{dN}{dt} = (\gamma - \delta N)N.$$

Це і є **рівняння Ферхольста–Перла**. Розв'яжемо його. Відокремивши змінні, матимемо

$$\int \frac{dN}{(\gamma - \delta N)N} = \int dt.$$

Подавши $\frac{1}{(\gamma - \delta N)N} = \frac{1}{\gamma N} + \frac{\delta}{\gamma(\gamma - \delta N)}$, знайдемо

$$\frac{1}{\gamma} \int \frac{dN}{N} + \frac{\delta}{\gamma} \int \frac{dN}{\gamma - \delta N} = \int dt$$

або

$$\frac{1}{\gamma} \ln N - \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma - \delta N) = t + C.$$

Таким чином

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{N}{\gamma - \delta N} = t + C. \quad (5.16)$$

З початкової умови: $t = 0, N = N_0 \left(N_0 < \frac{\gamma}{\delta} \right)$, знайдемо константу C

$$C = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{N_0}{\gamma - \delta N_0}.$$

Підставивши C в (5.16), маємо

$$\ln \frac{N(\gamma - \delta N_0)}{N_0(\gamma - \delta N)} = \gamma t \quad \text{або} \quad \frac{N(\gamma - \delta N_0)}{N_0(\gamma - \delta N)} = e^{\gamma t}.$$

Виразимо з останнього рівняння N

$$N = \frac{N_0 \gamma e^{\gamma t}}{\gamma - \delta N_0 + \delta N_0 e^{\gamma t}}.$$

Отримане рівняння називають логістичним (Ферхольста–Перла). Чисельність популяції за даних умов з плином часу наближається до деякої константи:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0 \gamma e^{\gamma t}}{\gamma - \delta N_0 + \delta N_0 e^{\gamma t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0 \gamma}{\frac{\gamma}{e^{\gamma t}} - \frac{\delta N_0}{e^{\gamma t}} + \delta N_0} = \frac{\gamma N_0}{\delta N_0} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Величину $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ називають рівноважною чисельністю популяції, вона дорівнює максимальній чисельності, теоретично можливій за даних умов.

Зауважимо, що розв'язок $N = \frac{\gamma}{\delta} = \mu$ також задовільняє дане диференціальне рівняння. Він не отримується із загального, оскільки у ході розв'язування ми виконували ділення на вираз $\gamma - \delta N$, вважаючи його не рівним нулю.

Графік $N(t)$ нагадує витягнуту літеру S (рис. 5.2). Тому його називають S -подібною кривою, яка досить добре описує динаміку чисельності багатьох популяцій, що існують в природних умовах.

Функція $N(t)$ має точку перегину при $N = \frac{\mu}{2} = \frac{\gamma}{2\delta}$, де з угнутої переходить в опуклу.

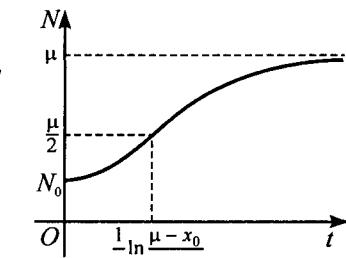


Рис. 5.2

Диференціальні рівняння в теорії епідемій. Обмежимось розглядом лише епідемій найпростішого виду. Будемо вважати, що процес передачі інфекції значно швидший, ніж тривалість самої хвороби, а також, що інфіковані особини не ізолюються, а розповсюджують епідемію під час контактів з неінфікованими. Припустимо також, що чисельність колонії постійна (тобто тривалість хвороби менша тривалості життя одного покоління і зміна чисельності, пов'язана з природною смертністю та народжуваністю, не враховується). В такому випадку сума інфікованих особин $y(t)$ та неінфікованих $x(t)$ у будь-який момент часу є постійною:

Знання наслідків залежить від знання причин.

Спіноза

$$x + y = a + b \quad \text{або} \quad y = a + b - x, \quad (5.17)$$

де a та b – кількість інфікованих та неінфікованих в початковий момент часу ($t = 0$).

Кількість неінфікованих x буде зменшуватись з плином часу пропорційно кількості контактів між тими та іншими, тобто пропорційно добутку xy :

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy, \quad (5.18)$$

де β – коефіцієнт пропорційності.

Підставивши в (5.17) вираз (5.18), матимемо диференціальне рівняння розвитку епідемії:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(a + b - x).$$

Відокремивши змінні, знайдемо

$$\frac{dx}{x(a + b - x)} = -\beta dt.$$

Звідси

$$\frac{(a + b - x) + x}{x(a + b - x)} dx = -\beta(a + b)dt,$$

звідки

$$\int_a^x \frac{dx}{x} + \int_a^x \frac{dx}{b - x + a} = -\beta(a + b) \int_0^t dt.$$

Ми врахували, що в момент часу $t = 0$ кількість інфікованих дорівнює a .

Знайшовши інтеграли зі змінною верхньою межею, матимемо

$$\ln x|_a^x - \ln|b - x + a||_a^x = -\beta(a + b)t$$

або

$$\ln \frac{x \cdot b}{(a - x + b)a} = -\beta(a + b)t.$$

Потенціюючи, отримаємо

$$\frac{x}{a - x + b} = \frac{a}{b} e^{-\beta(a+b)t}.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно x , дістанемо остаточно

$$x = \frac{a(b + a)}{a + b e^{\beta(b+a)t}}.$$

Цей закон описує зміну кількості інфікованих $x(t)$ з плином часу.

Фармакокінетичні моделі. Розглянемо розв'язування лінійних диференціальних рівнянь на прикладах різних фармакокінетичних моделей.

1. Однокамерна лінійна фармакокінетична модель описує процес зменшення маси (чи концентрації) лікарського препарату в організмі за рахунок виведення його природним шляхом. Вважають, що швидкість зміни лінійно залежить від наявної в даний момент часу t маси препарату m :

$$m' = -km \text{ або } \frac{dm}{dt} = -km, \quad (5.19)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, його ще називають постійною елімінації.

Однокамерна лінійна модель адекватно описує процеси, які відбуваються при введенні багатьох лікарських препаратів ін'єкцією в кров. Циркуляція крові практично миттєво забезпечує рівномірний розподіл препарату в організмі.

Розв'яземо диференціальне рівняння (5.19). Відокремивши змінні, ма- тимемо

$$\frac{dm}{m} = -kdt.$$

Зінтегрувавши ліву і праву частини, дістанемо

$$\ln m = -kt + c$$

або

$$m = e^{-kt+c} = e^{-kt} e^c.$$

Позначивши сталу e^c через C , отримаємо загальний розв'язок рівняння:

$$m = C e^{-kt}.$$

Щоб визначити константу C , досить задати початкові умови. Наприклад, якщо відомо, що в початковий момент часу $t = 0$ маса препарату дорівнювала m_0 , то константа C буде рівна:

$$C = m_0 e^{k \cdot 0} = m_0,$$

тобто частинний розв'язок рівняння (5.19) в такому випадку має вигляд

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \quad (5.20)$$

Рис. 5.3 показує, як з плином часу змінюється маса, а значить і концентрація лікарського препарату у двох суб'єктів (криві 1 і 2) з різними значеннями постійної елімінації ($k_2 = 2 k_1$), початкові маси m_0 в обох випадках однакові. Як видно з (5.20), постійна елімінації – величина, обернена до проміжку часу t , за який маса препарату в крові зменшується в $\approx 2,7$ рази, і є важливою суб'єктивною характеристикою організму.

2. Однокамерна лінійна фармакокінетична модель із всмоктуванням описує процеси, що відбуваються при внутрішньому'язовому та пероральному вве-

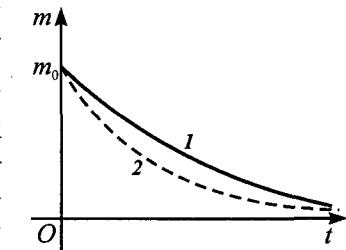


Рис. 5.3

денні препарату. Процес зміни маси (концентрації) препарату описується рівнянням

$$\frac{dm}{dt} = -km + \frac{dM}{dt}. \quad (5.21)$$

Другий доданок в правій частині характеризує поступове надходження препарату з деякого депо (участок м'язової тканини, таблетка). Зменшення маси препарату в депо прямо пропорційне його масі (див. приклад 4 на с. 46):

$$\frac{dM}{dt} = rM = rM_0 e^{-rt}, \quad (5.22)$$

Підставивши (5.22) в (5.21), отримаємо диференціальне рівняння, яке описує процес зміни маси лікарського препарату в однокамерній фармакокінетичній моделі зі всмоктуванням:

$$\frac{dm}{dt} = -km + rM_0 e^{-rt} \quad (5.23)$$

або

$$m' + km = rM_0 e^{-rt}. \quad (5.24)$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Щоб знайти його розв'язок, скористаємося підстановкою: $m = u(t) v(t)$. Рівняння (5.24) набуде вигляду:

$$u'v + v'u + kuv = rM_0 e^{-rt},$$

або

$$u'v + u(v' + kv) = rM_0 e^{-rt}. \quad (5.25)$$

Візьмемо в значенні v функцію $v = e^{-kt}$. Тоді рівняння (5.25) запишеться:

$$e^{-kt} \frac{du}{dt} = rM_0 e^{-rt}. \quad (5.26)$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Оскільки $e^{-kt} \neq 0$, матимемо

$$du = rM_0 e^{(k-r)t} dt.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u = \frac{rM_0}{k-r} e^{(k-r)t} + C,$$

а загальний розв'язок рівняння (5.23):

$$m = uv = e^{-kt} \left(\frac{rM_0}{k-r} e^{(k-r)t} + C \right)$$

або

$$m = e^{-kt} \left(C - \frac{rM_0}{r-k} e^{-(r-k)t} \right). \quad (5.27)$$

Зауважимо, що цей результат можна отримати значно швидше, скориставшись готовою формулою 5.15.

Враховуючи, що $m = 0$, при $t = 0$ знайдемо

$$C = \frac{rM_0}{r-k}.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння (5.23) має вигляд:

$$m = e^{-kt} \cdot \frac{rM_0}{r-k} (1 - e^{-(r-k)t})$$

або більш зручно

$$m(t) = \frac{M_0 r}{r-k} (e^{-kt} - e^{-rt}), \quad (5.28)$$

де M_0 – початкова маса препарату у депо; k – постійна елімінації; r – константа, яка характеризує швидкість всмоктування.

З'ясуємо, який вигляд має графік залежності $m(t)$. Похідна $m'(t) = -\frac{M_0}{r-k} (k e^{-kt} - r e^{-rt})$ дорівнює нулю, якщо

$$k e^{-kt} - r e^{-rt} = 0.$$

Перетворивши цей вираз, бачимо, що критичною точкою є $t = \frac{\ln \frac{k}{r}}{k-r}$. Перевіряючи зміну знаку похідної (враховуємо, що як правило $k < r$), переконуємося, що в даній точці функція має максимум. На рис. 5.4 графічно подано залежність $m(t)$ для двох різних значень r ($r_2 > r_1$) при однакових значеннях k : крива 1 описує процес, який реалізується при поступовому надходженні препарату з депо; крива 2 – випадок швидкого надходження, така ситуація спостерігається, наприклад, під час прийому ліків з доданням бікарбонату натрію (шипучих таблеток). Порівняння графіків свідчить, що повільне всмоктування може забезпечити майже постійну концентрацію препарату в крові на тривалий проміжок часу.

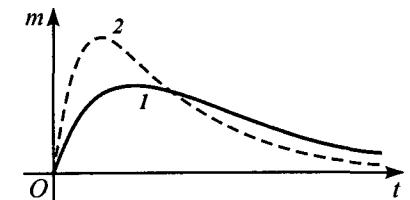


Рис. 5.4

3. Внутрішньовенне вливання за допомогою крапельниці дозволяє вводити лікарський препарат зі сталою швидкістю Q . Швидкість виведення, як і в попередніх випадках, прямо пропорційна масі препарату в крові. Диференціальне рівняння даної фармакокінетичної моделі має вигляд

$$\frac{dm}{dt} = Q - km.$$

Це неоднорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Запишемо його у звичному вигляді:

$$\frac{dm}{dt} + km = Q. \quad (5.29)$$

Загальний розв'язок цього рівняння відповідно до (5.15)

$$m = e^{-\int k dt} \left(C + \int Q e^{\int k dt} dt \right) = e^{-kt} \left(\frac{Q}{k} e^{kt} + C \right). \quad (5.30)$$

За умови, що $t = 0$, $m = m_0$, знайдемо

$$C = m_0 - \frac{Q}{k}.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння (5.29) має вигляд

$$m = e^{-kt} \left(\frac{Q}{k} e^{kt} + m_0 - \frac{Q}{k} \right)$$

або

$$m(t) = \frac{Q}{k} + \left(m_0 - \frac{Q}{k} \right) e^{-kt}. \quad (5.31)$$

Графік отриманої функції зображені на рис 2.7. Величина $\frac{Q}{k}$ має зміст рівноважної кількості лікарського препарату в крові, оскільки при $t \rightarrow \infty$ маса препарату $m(t)$ асимптотично наближається до значення $\frac{Q}{k}$.

Застосування диференціальних рівнянь в імунології. Вважатимемо (відповідно до моделі, запропонованої Г. Марчуком), що взаємодія організму з чужорідним антигеном визначається такими основними факторами.

1. Концентрація патогенних антигенів $V(t)$.

2. Концентрація антитіл $F(t)$. Під антитілами розуміємо як імуноглобуліни, так і клітинні структури, що нейтралізують даний антиген (Т-лімфоцити, клітинні рецептори).

3. Концентрація плазмоклітин $C(t)$. Під плазмоклітінами розуміємо популяцію носіїв та продуcentів антитіл (імунокомпетентні клітини та імуно-глобулінопродуценти).

4. Відносна характеристика враження органу $m(t)$.

Спочатку отримаємо рівняння, яке описує зміну антигенів в організмі. Швидкість зміни числа антигенів залежить від темпів їхнього розмноження βV і від темпів їхньої нейтралізації антитілами γFV :

$$\frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV,$$

де β – коефіцієнт розмноження антигенів, а γ – коефіцієнт нейтралізації антигенів під час зустрічі з антитілами.

Концентрація плазмоклітин залежить від швидкості їхньої генерації Q (Q пропорційна VF , коефіцієнт пропорційності α враховує ймовірність зустрічі “антиген–антитіло”, збудження каскадної реакції та кількість новоутворених клітин) і швидкості зменшення внаслідок старіння $\mu(C - C^*)$:

$$\frac{dC}{dt} = Q(t - \tau) - \mu(C - C^*),$$

де τ – час, протягом якого здійснюється формування каскаду плазмоклітин, C^* – концентрація плазмоклітин у здоровому організмі.

Оtrzymаємо третє рівняння, яке описує швидкість зміни кількості антитіл $\frac{dF}{dt}$. Ця величина залежить від швидкості виробництва антитіл плазмоклітінами ρC (ρ – швидкість виробництва антитіл однією плазмоклітиною) та швидкості їхнього виведення за рахунок природного катаболізму $\mu_F F$ (μ_F – коефіцієнт, обернено пропорційний до часу розпаду антитіл):

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \mu_F F.$$

Отримані рівняння не відображають послаблення імунної системи, обумовленого враженням інших систем та органів. Розглядаємо відносну характеристику враження органу m . Швидкість зміни цієї характеристики залежить від кількості антигенів σV (σ – константа, що залежить від виду хвороби) та відновлювальної діяльності організму $\mu_m m$ (μ_m – коефіцієнт, що характеризує відновлювальну діяльність організму):

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m.$$

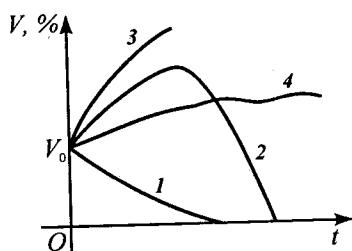


Рис. 5.5

максимальна концентрація вірусів залежить не від дози враження, а від стани імунної системи та типу вірусу;

хронічні форми хвороби обумовлені недостатньою стимуляцією імунної системи;

для переведення хронічної форми хвороби в гостру з подальшим одужанням необхідно підвищити концентрацію вірусу в організмі;

штучне зниження температури сприяє виникненню затяжних чи хронічних форм хвороби.

Бути мудрим – це значить бачити не тільки те, що під ногами, а й передбачати майбутнє.

Шіцерон

Отримані схеми типових форм перебігу хвороби наведено на рис. 5.5. Крива 1 характеризує захворювання, які протікають приховано. Антиген виводиться з організму за рахунок високого нормального рівня антитіл, специфічних для даного антигена. Крива 2 характеризує гострий нормальний перебіг хвороби, 3 – хвороби з летальним наслідком, 4 – хронічної форми хвороби.

5.5. ЗВИЧАЙНІ ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Звичайне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Загальний вигляд неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де $f(x)$ – доданок, вільний від невідомої функції, а p і q – сталі коефіцієнти.

Однорідне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (5.32)$$

Поставимо згідно з (5.1) у відповідність цьому рівнянню характеристичне:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Знайдемо його корені

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

і відповідно до теореми, наведеної в п. 5.2, запишемо загальний розв'язок характеристичного рівняння.

Розглянемо три можливі випадки.

1. Підкореневий вираз $\frac{p^2}{4} - q > 0$. У цьому випадку обидва корені різні й існує два лінійно незалежних розв'язки

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{i} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Загальний розв'язок (загальний інтеграл) має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (5.33)$$

де C_1 і C_2 – довільні дійсні сталі.

2. Підкореневий вираз $\frac{p^2}{4} - q = 0$. У цьому випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – кратні корені.

Частинні розв'язки (5.33) вибираються у вигляді: $y_1 = e^{\lambda x}$ та $y_2 = x e^{\lambda x}$.

Загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{\lambda x} + x C_2 e^{\lambda x}. \quad (5.34)$$

3. Останній із розглядуваних випадків більш складний і найбільш цікавий водночас. При $\frac{p^2}{4} - q < 0$ коренями є комплексно-спряжені числа:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = \alpha \pm i\beta,$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; $\alpha = \frac{p}{2}$ – дійсна частина; $i\beta = i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ – уявна частина комплексного числа.

Розв'язки диференціального рівняння мають вигляд:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x);$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Ми скористалися формулою Ейлера (1.5):

$$e^{\pm i\beta x} = \cos \beta x \pm i \sin \beta x.$$

Складемо дві незалежні лінійні комбінації цих розв'язків таким чином:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Тоді загальний розв'язок можна подати у зручнішому вигляді

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (5.35)$$

Отриманий розв'язок є рівнянням, яке описує коливальний процес, при чому амплітуда коливань зростає при $\alpha > 0$, залишається постійною при $\alpha = 0$ і зменшується при $\alpha < 0$. Таким чином, задача розв'язання однорідного диференціального рівняння зводиться до розв'язання відповідного алгебраїчного характеристичного рівняння. Залежно від знаку дискримінанта характеристично го рівняння, загальний розв'язок набуває одного з трьох поданих вище видів.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Розв'язати рівняння, яке описує процес радіоактивного розпаду:

$$N' = -rN.$$

Розв'язання. Враховуючи, що $N' = \frac{dN}{dt}$, дістанемо

$$\frac{dN}{dt} = -rN \quad \text{або} \quad \frac{dN}{N} = -rdt.$$

Зінтегрувавши ліву і праву частини, маємо загальний інтеграл:

$$\ln N = -rt + c,$$

звідси

$$N = e^{-rt+c} = e^c \cdot e^{-rt},$$

або, позначивши e^c через нову константу C , отримаємо загальний розв'язок рівняння:

$$N = C e^{-rt}.$$

Щоб знайти частинний розв'язок, потрібно визначити константу C . Для цього використаємо початкові умови. Наприклад, якщо відомо, що в початковий момент часу $t = 0$ кількість радіоактивних ядер дорівнювала N_0 , то константа C буде рівна:

$$C = N_0 e^0 = N_0,$$

тобто частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$N(t) = N_0 e^{-rt}.$$

Часто замість величини r швидкість розпаду характеризують періодом напіврозпаду T_0 , тобто часом, протягом якого кількість радіоактивної речовини зменшується в 2 рази. Період напіврозпаду T_0 і коефіцієнт r зв'язані рівністю

$$T_0 = \frac{\ln 2}{r}.$$

2. Розв'язати рівняння $xy' + 1 = y$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{xy dy}{dx} = y - 1.$$

Помноживши обидві частини рівняння на dx і розділивши на $x(y - 1)$, дістанемо

$$\frac{y dy}{y - 1} = \frac{dx}{x}.$$

Змінні відокремлено. Зінтегруємо обидві частини рівняння, яке найзручніше записати у вигляді

$$\int dy + \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x}.$$

Ми скористалися тим, що y можна подати як $y = (y - 1) + 1$. Результат інтегрування:

$$y + \ln |y - 1| = \ln |x| + C.$$

Остання рівність, яка встановлює залежність між змінними x та y , є загальним розв'язком заданого диференціального рівняння. Варто зауважити, що виконуючи ділення на вираз $x(y - 1)$, ми припускали, що $x \neq 0$ і $y \neq 1$, і таким чином, могли втратити розв'язки $x = 0$ і $y = 1$. Підставляючи $x = 0$ і $y = 1$ у вихідне рівняння, переконуємося, що $y = 1$ є його розв'язком, а $x = 0$ – ні.

3. Система містить 100 л води, в якій розчинено 10 кг солі. У систему неперервно подається вода з об'ємною швидкістю $Q = 5$ л/хв. Скільки солі залишиться в системі через 1 годину, якщо об'єм системи незмінний (швидкість витікання розчину дорівнює швидкості подачі води Q)?

Розв'язання. Припустимо, $m(t)$ – кількість солі в момент часу t ; dm – зміна кількості солі за деякий достатньо малий проміжок часу dt , протягом якого можна вважати концентрацію солі $\frac{m}{V}$ незмінною. Тоді зміна кількості солі за час dt дорівнює $Q \frac{m}{V} dt$. Таким чином, отримаємо диференціальне рівняння

$$dm = -\frac{m}{V} Q dt$$

або

$$\int \frac{dm}{m} = -\frac{Q}{V} \int dt.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$m = C e^{-\frac{Qt}{V}}.$$

Скориставшись початковими умовами: $m_0 = 10$ кг при $t_0 = 0$, знайдемо $C = 10$ кг. Отже,

$$m = 10e^{-0.05t}.$$

Підставивши $t = 1$ год = 60 хв, матимемо $y = 10e^{-3} \approx 0.5$ кг.

4. Розв'язати рівняння $y' - y = 2x + 3$.

Розв'язання. Записавши рівняння в вигляді $y' = y + 2x + 3$ і зробивши заміну $z = y + 2x$, матимемо $z' = y' + 2$ або $y' = z' - 2$. В результаті підстановки дістанемо

$$z' = z + 5$$

або

$$\frac{dz}{z+5} = dx.$$

Зінтегрувавши це рівняння, отримаємо загальний розв'язок:

$$\ln|z+5| = x + C$$

або, повернувшись до змінної x ,

$$\ln|y+2x+5| = x + C.$$

5. До пружини жорсткостю k , яка знаходитьться на горизонтальній поверхні, прикріпили вантаж масою m . Вантаж виводиться з положення рівноваги і відпускається. Записати диференціальне рівняння коливань.

Розв'язання. Позначимо відхилення від положення рівноваги через $x(t)$, де t – час. На вантаж діє сила пружності $F = -kx$ (закон Гука) і сила опору середовища, величина якої прямо пропорційна швидкості

$$F_{\text{оп}} = -r \frac{dx}{dt}.$$

Обидві ці сили напрямлені протилежно до напрямку руху вантажу. Використовуючи другий закон Ньютона, отримаємо рівняння коливань:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

або

$$x'' + 2\beta x' + \omega^2 x = 0,$$

де $2\beta = r/m$, $\omega^2 = k/m$.

6. Знайти розв'язок рівняння гармонічних коливань $y'' + \omega^2 y = 0$, де $y = f(t)$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Рівняння має два комплексно-спряжені корені: $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$. Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Якщо прийняти $C_1 = A \sin \phi_0$, а $C_2 = A \cos \phi_0$, дану функцію можна записати у вигляді

$$y = A \sin(\omega t + \phi_0).$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Його корені: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Отже, розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x.$$

8. Розв'язати рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ з коренями:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Розв'язок диференціального рівняння у відповідності з (5.34) дістанемо у вигляді:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = e^{3x} (C_1 + xC_2).$$

9. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ має комплексні корені $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$. Значить, загальним розв'язком є:

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

1. $y' = 2y^2$.

2. $y' = 6x^5 + 1$.

3. $xyy' = 0,5$.

4. $xyy' = 1 - x^2$.

5. $xy' = 2y$.

6. $(x + a) dx = x dy$.

7. $y' = -x^2 + 4$.

8. $y' = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}$.

9. $y' = -\frac{y}{1+x}$.

10. $\frac{dx}{dt} = x \cos t$.

11. $y \operatorname{tg} x = y$.

12. $y' = -\frac{y}{x}$.

13. $x(1-y^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$.

14. $3y^2y' = 2x(y^3 + 1)$.

15. $y' = -y^2 \sin x$.

16. $y' = -x + 2^x$.

17. $xyy' = 1 - x$.

18. $e^y y' = 4x^3$.

19. $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$.

20. $\frac{dx}{dt} = x^2(1+t^2)$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

21. $(1 + e^x)yy' = e^x$, якщо $y = 1$ при $x = 0$.

22. $y' \operatorname{tg} x = y \ln y$, якщо $y = e$ при $x = \pi/4$.

23. $\sin x dx = -dy$, якщо $y = 2$ при $x = 0$.

24. $(x + 1)dy = y dx$, якщо $y = 8$ при $x = 1$.

25. $y dy - x dx = dx$, якщо $y = 0$ при $x = 2$.

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку.

26. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

27. $y'' - y = 0$.

28. $y'' - y' = 0$.

29. $y'' + y = 0$.

30. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

31. $y'' + 49y = 0$.

32. $y'' - 4y' + 10y = 0$.

33. $3y'' + 2\sqrt{3}y' + 7y = 0$.

34. $y'' + 4y' + 13y = 0$.

35. $y'' + 2y' + y = 0$.

36. $y'' - 4y' + 2y = 0$.

37. $y'' - hy' = 0$ ($h \neq 0$).

38. $\frac{y'+2y}{y''} = 3$.

39. $y'' + \pi^2 y = 0$.

40. $y'' + 2y' + 5 = 0$.

41. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Знайти загальні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь.

42. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

43. $xdy - ydx = xdx$.

44. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$.

45. $(x + y)y' = 1$.

46. $y' + 2xy = 0$.

47. $y' - \frac{y}{x} = x$.

48. Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і оточуючого середовища. До якої температури охолоджується тіло за 30 хвилин, якщо за 10 хвилин воно охололо від 100 до 60 °C. Температура оточуючого середовища незмінна.

Довгим є шлях через настанови, коротким і дійовим – через приклади.

Сенека

49. Знайти закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини, якщо через 1 годину після введення 10 мг препарату його маса зменшилась вдвое. Вважати, що швидкість розчинення прямо пропорційна часу.

50. Скорочення м'яза $x(t)$ описується рівнянням:

$$x' = A(x_0 - x),$$

де x_0 – повне скорочення м'яза; A – константа, яка залежить від навантаження. Знайти розв'язок цього рівняння, якщо в момент часу $t = 0$ $x = 0$.

51. Кінетика хімічних реакцій першого порядку описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

де k – константа реакції. Одержані розв'язок за умови: $a = 10$, $k = 0,2$.

52. Тіло рухається з прискоренням a і початковою швидкістю v_0 . Знайти закон руху цього тіла і шлях, пройдений за перші 10 хвилин руху.

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь.

53. $y' + 2y = e^{-x}$.

54. $xy' - 2y = x^3 \cos x$.

55. $y' + 2xy = 2x e^{-x^2}$.

56. $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$.

57. $(2x - y^2)y' = 2y$.

58. $y' - y e^x = 2x e^{e^x}$.

Встановити, до якого типу відносяться диференціальні рівняння і розв'язати їх.

59. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

60. $y''' = e^{2x}$.

61. $2x^2y' = y + 5x^2$.

62. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

63. $\sqrt{x}dy + \frac{dx}{\sin y} = 0$.

64. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

6 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

6.1. ЧАСТОТА ТА ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ

Історично теорія ймовірностей виникла в XVI–XVII ст. як наука, що математичними методами аналізує азартні ігри (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма). Однак, не тільки результат гри, а й більшість природних та соціальних явищ є стохастичними, тобто такими, що їх кінцевий результат неможливо передбачити однозначно. Такі явища, їх в теорії ймовірностей називають *подіями*, часто зустрічаються в повсякденному житті й у макро- і мікромісцевості, їх роль чимала і в медико-біологічних системах. Події можна поділити на три типи:

достовірні – ті, які відбуваються завжди;

неможливі – ті, які ніколи не мають місця;

випадкові (стохастичні) – ті, які можуть виникати або не виникати при виконанні певного комплексу умов.

Теорія ймовірностей займається вивченням закономірностей випадкових подій при їх масовій появі.

Вся визначеність сконцентрована у мінулому.

Східна мудрість

дана подія реалізується, до повного числа випробувань:

$$v(A) = \frac{m(A)}{n},$$

де $m(A)$ – число дослідів, в яких подія A реалізується; n – повне число дослідів.

Якщо число випробувань велике, то, як правило, частоти появи подій A в різних серіях дослідів мало відрізняються одна від одної і їх відмінність тим менша, чим більше випробувань в серії. Тобто частота події при великому числі випробувань перестає носити випадковий характер.

Наприклад, французький природознавець Ж. Бюфон досліджував частоту появи герба при киданні монети. При 4040 дослідах герб випав 2048 разів.

Отже частота появи герба $\frac{2048}{4040} = 0,50693$. Англійський математик К. Пірсон

повторив цей експеримент 24 000 разів – герб випав 12012 разів. Таким чином, частота появи герба в цьому досліді становить 0,5005. Можна зроби-

ти висновок, що при дуже великій кількості дослідів частота появи герба приблизно дорівнює 0,5.

Аналіз статистичних даних, зібраних у Швеції в 1935 р., свідчить, що відносна частота народження дівчаток має значення, близьке до 0,482. Статистичні дані інших країн і за інші роки дають приблизно такі ж результати.

Імовірністю $P(A)$ випадкової події A називається границя, до якої наближається частота події A при необмеженому зростанні повного числа випробувань, тобто

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(A)}{n}.$$

В теорії ймовірностей існує теорема (теорема Бернуллі), яка доводить, що при великому числі випробувань n частота події $v(A)$ наближається до ймовірності $P(A)$.

Наведене означення ймовірності називають *статистичним*. Однак, може трапитись ситуація, коли ви не маєте змоги (або не бажаєте) провести дослід. Як оцінити ймовірність в такому випадку? Наведемо ще одне означення, яке носить назву *класичного*.

Імовірністю події A називають відношення кількості сприятливих для цієї події випадків до загального числа випадків, що можуть реалізуватися:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Приклади.

1. Розглянемо колоду з 36 гральних карт. Нехай подія A полягає в тому, що довільно взята карта виявиться тузом. Сприятливими є 4 випадки із 36 можливих, тому

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Ймовірність події B , яка полягає в тому, що взята навзгод картка буде пікової масти,

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

2. На трьох картках написані цифри 1, 2, 3. Яка ймовірність того, що, розташувавши їх довільним чином, отримаємо число 321?

Можливими є шість випадків: 123, 132, 231, 213, 321 та 312. Сприятливим – один. Тому шукана ймовірність $P = \frac{1}{6}$.

3. Кидамо гральний кубик (однорідний кубик, грані якого пронумеровані). Яка ймовірність, що випаде парне число? Сприятливими є появі цифр 2, 4, 6, тому $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Події A_1, A_2, \dots, A_n називаються *рівноможливими*, якщо кожна із них має однакову ймовірність відбутися чи не відбутися.

Над усілякими правилами є інші, незнатомі тобі.

Східна мудрість

У прикладі 3 рівноможливими подіями є поява парного або непарного числа. Рівноможливими подіями в цьому прикладі також є поява будь-якої цифри від 1 до 6: $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$.

Імовірність будь-якої події задовільняє подвійну нерівність

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad (6.1)$$

причому ймовірність неможливої події дорівнює нулю, а достовірної – одиниці.

6.2. ОБ'ЄДНАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Введемо поняття *об'єднання (суми)* двох і більше випадкових подій. Об'єднання двох випадкових подій A_1 і A_2 – це така подія A , при якій відбувається хоча б одна з цих подій, тобто A_1 або A_2 . Символічно позначають: $A_1 \cup A_2$. Імовірність об'єднання подій залежить від їхньої сумісності.

Події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому ж досліді; в протилежному випадку – події **сумісні**.

Як приклад розглянемо однократне кидання грального кубика. Подія A – поява чотирьох очок; подія B – поява трьох очок; подія C – поява непарного числа. Події A та B в цьому прикладі є несумісними, B і C – сумісними.

Теорема додавання ймовірностей для несумісних подій. Ймовірність об'єднання двох випадкових несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей кожної події окремо, тобто

$$P(A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (6.2)$$

Доведення. Припустимо, що в n дослідах подія A_1 реалізується m разів, а подія A_2 – k разів. З урахуванням їхньої несумісності загальне число сприятивих випадків $m+k$. Відповідно до класичного означення

$$P(A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1 \cup A_2) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A_1) + P(A_2).$$

Графічною ілюстрацією даного випадку є рис. 6.1, об'єднанню подій відповідає заштрихована область.

Наши висновки настільки достовірні, наскільки добре наші дані.

В. В. Швирков

Якщо в результаті досліду обов'язково реалізується одна з подій A_1 , A_2 , ..., A_n і ніяка інша подія реалізуватись не може, то говорять, що ці події утворюють **повну групу**.

Якщо для деякої події A сприятивими є всі n випадків, котрі утворюють повну групу несумісних подій, то ймовірність такої події

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Іншими словами, поява хоч однієї з подій, що утворюють повну групу, є достовірною подією. Останню рівність часто записують у вигляді

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1 \quad (6.3)$$

і називають **умовою нормуванням**.

Дві події A і \bar{A} називаються **протилежними**, якщо вони несумісні і утворюють повну групу. Згідно з теоремою додавання ймовірностей

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

або

$$p + q = 1,$$

де $q = P(\bar{A})$, а $p = P(A)$. Тобто сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

Припустимо, що події A_1 та A_2 сумісні, тоді **теорема додавання ймовірностей** має вигляд:

$$P(A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \text{ і } A_2). \quad (6.4)$$

де $P(A_1 \text{ і } A_2)$ – імовірність суміщення подій A_1 і A_2 . Зміст цього виразу пояснюється нижче.

Справедливість наведеної формулі проілюструємо графічно (рис. 6.2). Об'єднанню подій відповідає заштрихована область. Зауважимо, що наведене формуллювання теореми є загальним, оскільки для несумісних подій A_1 та A_2 ймовірність $P(A_1 \text{ і } A_2) = 0$.

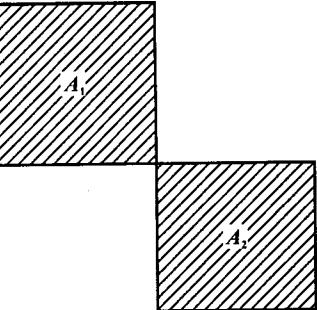


Рис. 6.1

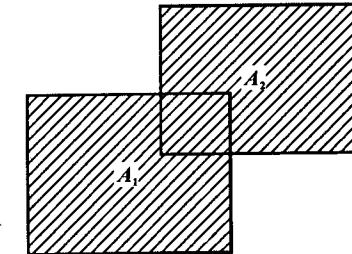


Рис. 6.2

6.3. ПЕРЕТИН ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Перетином (добутком) подій A і B називається така подія, при якій одночасно реалізується випадкова подія A і випадкова подія B . Символічно позначають: $A \cap B$.

Подія A називається **незалежною** від події B , якщо ймовірність появи події A не залежить від того, реалізувалась подія B чи ні. В протилежному випадку подія називається **залежною**. Для залежних подій користуються поняттям умової ймовірності $P_A(B)$ – ймовірності реалізації події B , за умови, що подія A відбулася.

Пояснимо це на прикладах.

Приклади.

1. Кидають гральний кубик. Ймовірність появи одиниці $P(A) = \frac{1}{6}$. Яка ймовірність того, що при повторному випробуванні знову випаде 1?

Подія B – поява 1 при повторному випробуванні – також має ймовірність $P(B) = \frac{1}{6}$. Події A та B в цьому прикладі незалежні.

2. В урні 2 білі та 2 чорні кульки. Подія A – витягти білу кульку. Очевидно, $P(A) = \frac{1}{2}$. Витягнута кулька не повертається в урну. Якою є ймовірність події B – вийняти білу кульку при повторному випробуванні?

Очевидно, результат суттєво залежить від того, яка кулька була витягнута першою:

$$P_A(B) = \frac{1}{3} \text{ – якщо реалізувалась подія } A;$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{3} \text{ – якщо подія } A \text{ не реалізувалась.}$$

Події A та B в цьому прикладі є залежними.

Теорема множення ймовірностей для залежних подій. Ймовірність перетину двох залежних подій дорівнює добутку умовної ймовірності $P_A(B)$ на ймовірність $P(A)$ реалізації події A .

Математичний запис теореми множення ймовірностей для двох залежних подій:

$$P(A \text{ і } B) = P(A) P_A(B). \quad (6.5)$$

Доведення. Припустимо, що з усіх n випадків для події A сприятливими є k , а з цих k випадків подія B сприяє m . Це означає, що подія B сприяє m випадків з n , тобто

$$P(A \text{ і } B) = P(A \cap B) = \frac{m}{n} = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{k} = P(A) \cdot P_A(B).$$

Зауважимо, що у випадку незалежних подій A і B

$$P_A(B) = P(B).$$

Таким чином, **теорему множення ймовірностей для незалежних подій** можна сформулювати так:

Ймовірність перетину двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A \text{ і } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Графічний приклад перетину двох незалежних подій подано на рис. 6.3 (перетин подій – заштрихована область).

Припустимо, що в результаті випробування може з'явитись n незалежних в сукупності подій, ймовірності кожної з яких відомі. Як знайти ймовірність того, що наступить хоча б одна з цих подій? Відповідь на це запитання дає теорема.

Теорема. Ймовірність реалізації події A , сприяльовою для якої є поява хоча б однієї із незалежних в сукупності подій A_1, A_2, \dots, A_n , дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей $q_1 q_2 \cdots q_n$ протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \cdots q_n.$$

Якщо події A_1, A_2, \dots, A_n мають однакову ймовірність, то остання формула набуває вигляду

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (6.6)$$

Приклад. У відділенні три операційні. Для кожної з них ймовірність бути зайнятою (не бути вільною) в даний момент часу $q = 0,3$. Яка ймовірність, що хоча б одна операційна вільна в даний момент?

Згідно з (6.6) шукана ймовірність

$$P = 1 - (0,3)^3 = 1 - 0,027 = 0,973.$$

Зауважимо, що $(0,3)^3$ – імовірність того, що всі три операційні зайняті. Події “всі операційні зайняті” та “хоча б одна вільна” є протилежними й, безумовно, утворюють повну групу.

6.4. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА

Теорема. Якщо подія A може реалізуватись тільки при виконанні однієї з подій B_1, B_2, \dots, B_n , які несумісні і утворюють повну групу, то ймовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A). \quad (6.7)$$

Ця формула носить називу **формули повної ймовірності**.

Розглянемо її застосування на прикладі.

Приклад. У діагностичний центр в рівних кількостях потрапляють пацієнти з трьох консультативних пунктів. Ймовірність, що діагноз буде підтверджено для пацієнтів з направлінням першого пункту, становить 90 %, другого – 87 %, третього – 75 %. Яка ймовірність, що діагноз підтвердиться у взятого навмання пацієнта?

Оскільки пацієнт вибирає довільним чином, то ймовірності, що він направлений одним з певним консультативним пунктом із трьох можливих, однакові і дорівнюють $\frac{1}{3}$. Згідно з теоремою повної ймовірності

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0,9 + \frac{1}{3} \cdot 0,87 + \frac{1}{3} \cdot 0,75 = 0,84.$$

Отже, ймовірність події A (підтвердження діагнозу у взятого навмання пацієнта) становить 84 %.

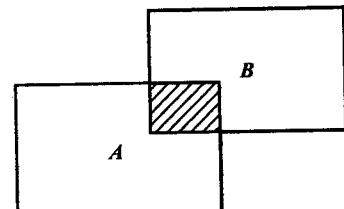


Рис. 6.3

Припустимо, що в рамках міркувань формули повної ймовірності проведено випробування, в результаті якого реалізувалась подія A . Як зміниться в зв'язку з цим імовірність гіпотези (величин $P_A(B_i)$)? Відповідь на це запитання дає **формула Байєса**:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}. \quad (6.8)$$

Незмінно пам'ятай: природа – не бог, людина – не машина, гіпотеза – не факт.

Д. Дідро

після того, як результат випробування став відомим.

Пояснимо застосування формули Байєса на попередньому прикладі.

Приклад. Припустимо, що у взятого навміння пацієнта діагноз підтверджився. Яка ймовірність того, що він був направлений першим консультативним пунктом? Відповідно до формули (6.8), враховуючи, що знаменник був обчислений за теоремою повної ймовірності в попередньому прикладі, матимемо

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)} = \frac{0,9 \cdot \frac{1}{3}}{0,84} = 0,36.$$

Отже, у випадку відомого результату випробування (діагноз підтверджився) імовірність того, що пацієнт був направлений першим консультативним пунктом, становить 36 %.

Сучасна медицина широко використовує різні методи комп'ютерної діагностики, більшість із яких послуговується формулою Байєса. На основі статистичної обробки великої кількості історій хвороб з підтвердженням діагнозом встановлюються ймовірності проявів певних симптомів при різних захворюваннях. За формулою Байєса розраховують імовірності появи хвороб за наявної сукупності симптомів.

6.5. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ КОМБІНАТОРИКИ

В подальшому нам знадобляться формулі для обчислення кількості комбінацій певного типу, які можуть бути складені з даних предметів. Найчастіше ця

Математика, як журна, перемежує лише те, що в них засипають. Списавши сторінки формулами, ви не отримаєте істини з хібних припущенень.

Гекслі

проблема виникає при розв'язуванні задач на основі класичного означення ймовірності. Розділ математики, що розглядає ці питання, називають **комбінаторикою**.

Розміщеннями з n різних елементів по m елементів ($m \leq n$) A_n^m називають комбінації, складені з даних n

елементів по m , які відрізняються або самими елементами, або порядком розташування цих елементів.

Приклад. Телефонуючи приятелю, абонент забув дві останні цифри. Він пам'ятає лише, що ними можуть бути 3, 5, 7 і що ці цифри різні. Скільки існує варіантів набору даного номера?

З даних чисел по два можна скласти такі розміщення: 35, 37, 53, 57, 73, 75. Тобто $A_3^2 = 6$.

Число різних розміщень з n елементів по m обчислюється за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

Окремий випадок розміщень, що має місце при $m = n$, називають **перестановками**. Число всіх перестановок

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

де $n!$ дорівнює добутку всіх чисел від 1 до n .

Сполученнями із n різних елементів по m елементів C_n^m називають комбінації, що складені із даних n елементів по m елементів, які відрізняються хоча б одним елементом.

Зауваження. В розміщеннях враховується порядок розташування елементів, а в сполученнях ні.

Число сполучень з n елементів по m обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!},$$

або

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Зазначимо корисну особливість

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

якою зручно користуватись, якщо $m > \frac{n}{2}$.

Приклад. Скількома способами із групи, в якій 10 студентів-фармацевтів, можна вибрati двох, щоб направити на практику в дану аптеку?

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

Уявімо собі, що ці студенти займатимуть різні посади. Кількість способів при цьому зросте (можна сказати, що тут відіграє роль порядок розташування елементів) і буде дорівнювати

$$A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90.$$

6.6. ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Припустимо, що проводиться серія випробувань n , причому:

1) ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань;

2) у кожному з випробувань можливі два варіанти – подія A реалізувалась; подія A не реалізувалась;

3) всі випробування незалежні;

4) кількість дослідів n скінчена.

Потрібно знайти ймовірність того, що подія A реалізується рівно m разів у серії з n випробувань. Ця ймовірність визначається **формулою Бернуллі**:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (6.9)$$

де p – імовірність появи події A в одному досліді; $q = 1 - p$ – імовірність того, що подія A не з'явиться в одному досліді; C_n^m – число можливих сполучень із n елементів по m :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Вченість сама по собі дає вказівки надзвичайно загальні, якщо їх не уточнити досвідом.

А. Ейнштейн

Приклад. Припустимо, що схожість насіння $p = 0,8$. У розпорядженні експериментатора 5 насінин. Яка ймовірність, що проросте рівно три із них? Відповідно до (6.9) матимемо:

$$P_5(3) = \frac{5!}{3!2!} \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 = 10 \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,2.$$

Аналогічним чином можуть бути розраховані ймовірності проростання 0, 1, 2, 4, 5 насінин.

6.7. ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА. ДИСКРЕТНІ ТА НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНІ

Випадковими називаються величини, які в результаті випробувань (вимірювань, спостережень) можуть набувати різних числових значень при однакових умовах випробувань.

Випадкові величини бувають:

1) **дискретними**, тобто такими, які набувають зліченої множини значень і їх можна пронумерувати;

2) **неперервними**, тобто такими, які набувають будь-яких значень в заданому скінченному або нескінченному інтервалі.

Наприклад, число народжених хлопчиків із 50 новонароджених є дискретною випадковою величиною, яка може набувати значень 0, 1, 2, ..., 50. Безумовно, ймовірності кожного з можливих значень P_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 50$) відрізнятимуться.

Неперервними випадковими величинами є: тривалість життя, температура повітря, біомаса тощо.

Розподілом дискретної випадкової величини X називається множина її можливих значень $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ і ймовірностей $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, які відповідають цим значенням. Як правило, розподіл випадкової дискретної величини задають таблицею.

X_1	X_2	X_3	...	X_{n-1}	X_n
P_1	P_2	P_3	...	P_{n-1}	P_n

Зрозуміло, що сума всіх імовірностей повинна дорівнювати одиниці.

Неперервні випадкові величини неможливо задати таблицею розподілу, їх задають графічно або аналітично (інтегральною і диференціальною функціями розподілу). Інтегральною функцією розподілу описують і дискретні випадкові величини.

6.8. ІНТЕГРАЛЬНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

Інтегральною функцією розподілу (інтегральним законом розподілу) випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X набуде значення менше, ніж x :

$$F(x) = P(X < x),$$

де x – дійсне число.

Основні властивості інтегральної функції розподілу.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.

3. Ймовірність попадання випадкової величини в напівінтервал $[a; b]$ дорівнює різниці значень інтегральної функції розподілу на кінцях цього інтервалу:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде будь-якого наперед заданого значення, дорівнює нулю:

$$P(X = x_0) = 0.$$

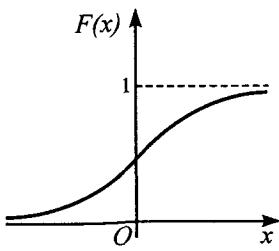


Рис. 6.4

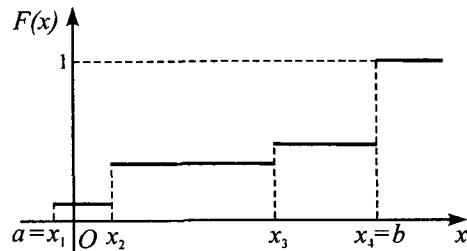


Рис. 6.5

5. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал, сегмент і напівінтервал з одними і тими ж значеннями кінців однакова:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b).$$

6. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать деякому інтервалу $(a; b)$, то:

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a;$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

Відзначимо, що інтегральна функція розподілу однаковим чином визначається для дискретних і неперервних випадкових величин. Для неперервної випадкової величини функція розподілу є неперервною і має вигляд, подібний до зображеного на рис. 6.4. Графік функції розподілу дискретної випадкової величини, всі значення якої належать $[a; b]$, подано на рис. 6.5.

Для дискретної випадкової величини функція розподілу в деякій точці x дорівнює сумі ймовірностей тих її значень, які менші від x :

$$F(x) = \sum_{X_k < x} P(X_k).$$

Диференціальну функцію розподілу (щільністю або густину розподілу) називається функція $f(x)$, яка дорівнює похідній інтегральної функції розподілу:

$$f(x) = F'(x).$$

Оскільки $F(x)$ – неспадна функція, то $f(x) \geq 0$. Очевидно, що поняття диференціальної функції розподілу можна ввести лише для неперервних випадкових величин.

Теорема. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення з деякого інтервалу $(a; b)$, дорівнює визначеному інтегралу від її щільності розподілу $f(x)$ з межами інтегрування a і b :

$$\int_a^b f(x) dx = P(a < X < b). \quad (6.10)$$

Доведення. Згідно з (6.10)

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Відповідно до формул Ньютона–Лейбніца

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.11)$$

Теорему доведено.

Геометричний зміст цієї формули очевидний. Імовірність попадання значень випадкової величини X в даний інтервал дорівнює площі фігури, обмеженої кривою, яка задає щільність розподілу, віссю абсцис і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 6.6). Безумовно, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

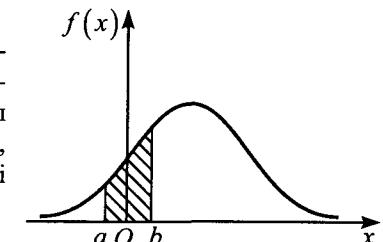


Рис. 6.6

Знаючи щільність розподілу, можна знайти функцію розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (6.12)$$

Дійсно, замінивши в (6.11) a на $-\infty$, b на x , матимемо (6.12).

6.9. ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх можливих значень величини X на відповідні ймовірності:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n P_i X_i = P_1 X_1 + P_2 X_2 + \dots + P_n X_n. \quad (6.13)$$

Якщо всі випадкові події рівномовірні, то

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{n},$$

де n – число випадкових подій, що утворюють повну групу.

В цьому окремому випадку математичне сподівання

$$M(X) = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Математичне сподівання (МС) дискретної випадкової величини X при достатньо великому числі випробувань приблизно дорівнює середньому її значенню.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (6.14)$$

Не варто ототожнювати МС з найімовірнішим значенням випадкової величини, яке називають **модою**. МС може не співпадати з жодним значенням випадкової величини. Наприклад, МС кількості очок, що випадають при киданні грального кубика:

$$M(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5.$$

Імовірність появи такого числа дорівнює 0.

Фізичною аналогією МС є поняття центра мас.

Властивості математичного сподівання.

1. МС постійної величини C дорівнює цій величині:

$$M(C) = C.$$

2. Постійний множник можна виносити за знак МС:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. МС суми двох незалежних випадкових величин X та Y дорівнює сумі їхніх МС:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. МС добутку двох незалежних величин дорівнює добутку їхніх МС:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Математичне сподівання неповно характеризує розподіл випадкової величини. Важливо знати як "розкидані" можливі значення випадкової величини відносно свого МС. Наприклад, при однаковій середній величині річних опадів один регіон може бути засушливим і несприятливим для землеробства (відсутні опади весною та літом), а інший – цілком сприятливим. Інший приклад, чи може бути інформативним середнє значення температури пацієнта у деякому відділенні клініки? Очевидною стає необхідність введення числової характеристики, за якою можна було б робити висновок про розкид можливих значень випадкової величини відносно МС.

Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називається МС квадрата відхилення випадкової величини X від її МС:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Інший вираз для дисперсії:

$$D(X) = M(X)^2 - M^2(X), \quad (6.15)$$

тобто дисперсія – це різниця МС квадрата випадкової величини і квадрата МС цієї величини. Зрозуміло, що дисперсія характеризує відхилення випадкових величин відносно їх середнього значення (математичного сподівання).

Дисперсія неперервної випадкової величини з математичним сподіванням $M(X) = a$ обчислюється за формулою

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 f(x)dx.$$

Властивості дисперсії.

1. Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю:

$$D(C) = M(C^2) - M^2(C) = 0.$$

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрата:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсія алгебраїчної суми двох незалежних випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі дисперсій цих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y).$$

Розмірність дисперсії збігається з розмірністю квадрата величини, яка досліджується. Тому для характеристики відхилення не середнього квадрата, а самої випадкової величини, вводиться поняття середнього квадратичного відхилення σ . Середнє квадратичне відхилення пов'язане з дисперсією формулою

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (6.16)$$

Видно, що розмірність σ співпадає з розмірністю самої випадкової величини X .

6.10. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Біномний розподіл. Припустимо, що проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких може реалізуватись подія A , імовірність появи якої p постійна у всіх випробуваннях (значить, імовірність непояви $q = 1 - p$). Розглянемо як дискретну випадкову величину X число появ події A в цих випробуваннях. Оскільки подія A в випробуваннях може не з'явитись, з'явитись один або два рази, ..., або n разів, то можливими значеннями X є: 0, 1, 2, 3, ..., n . Імовірності цих значень визначаються формулою Бернуллі (6.9):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де p – імовірність появи події A в одному досліді; $q = 1 - p$ – імовірність того, що подія A не з'явитись в одному досліді; C_n^m – число можливих сполучень із n елементів по m :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Отже, біномним називають розподіл імовірностей, які визначаються формулою Бернуллі. Подамо його у вигляді таблиці.

X	0	1	...	m	...	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$...	$C_n^m p^m q^{n-m}$...	p^n

Математичне сподівання випадкової величини X , розподіленої за біномним законом:

$$M(X) = np. \quad (6.17)$$

Дисперсія

$$D(X) = npq,$$

а значить, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}. \quad (6.18)$$

Біномному розподілу підпорядковуються такі випадкові події, як виклик швидкої допомоги, число операцій, ріст бактерій, деякі характеристики епідемій тощо. Якщо число дослідів велике, то обчислення імовірностей за

Інколи пошуки правильного розв'язку обходяться дорожче за помилки.

Східна мудрість

формулою Бернуллі громіздкі, тоді використовують пуассонівське наближення.

Розподіл Пуассона. Для визначення імовірності того, що подія, імовірність якої мала ($p < 0,1$), відбудеться m разів у серії з n випробувань (n достатньо велике), використовують формулу Пуассона

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad (6.19)$$

де $\lambda = np$ – середнє значення числа випадків, в яких реалізується дана подія.

Це наближення є особливо вдалим, коли імовірність події A невелика, тому формулу Пуассона часто називають **законом рідкісних подій**. Говорять, що випадкова величина X розподілена за законом Пуассона, якщо ця величина задана таблицею.

X	0	1	2	3	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$...

Розподіл Пуассона використовується в теорії масового обслуговування, теорії надійності, при вирішуванні проблем, пов'язаних з використанням медичної апаратури тощо. Математичне сподівання дискретної величини X , розподіленої за законом Пуассона:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n P_i X_i = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda.$$

Дисперсія

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Використання апроксимаційної формули Пуассона коректне, якщо n не менш декількох десятків, а λ при цьому не перевищує 10. Якщо ж $\lambda \geq 10$, доцільніше користуватись формuloю Муавра–Лапласа (див. п. 6.15).

6.11. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Рівномірний розподіл. Розподіл імовірностей називають рівномірним, якщо на проміжку (a, b) , до якого належать всі можливі значення випадкової величини X , щільність розподілу має постійне значення c , тобто

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ c & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

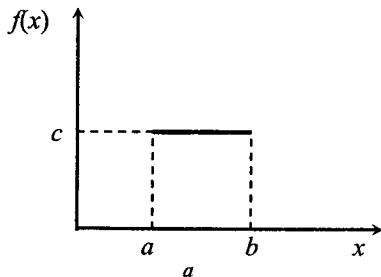


Рис. 6.7

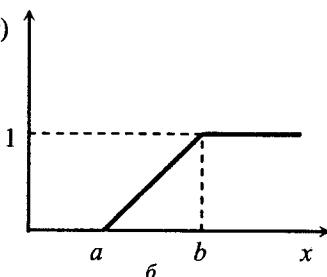


Рис. 6.7, б

Звідси

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a).$$

Але, як відомо,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

З порівняння цих рівностей отримаємо

$$c = \frac{1}{b-a}.$$

Отже, щільність ймовірностей неперервної випадкової величини X , яка розподілена рівномірно на проміжку (a, b) , має вигляд (рис. 6.7, а):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ для рівномірно розподіленої величини на проміжку

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Її графік подано на рис. 6.7, б.

Наведемо приклад деяких конкретних величин з рівномірним законом розподілу. При вимірюванні багатьох фізичних величин проводяться округлення до найближчої поділки шкали. Похибки (помилки) при округленні є випадковою величиною, що має рівномірний закон розподілу. Симетричне колесо, яке обертається і зупиняється внаслідок тертя (рулетка в казино),

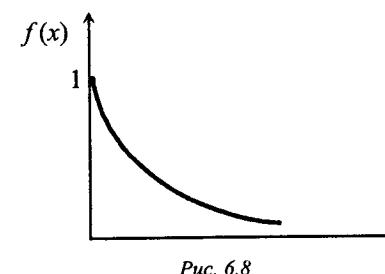


Рис. 6.8

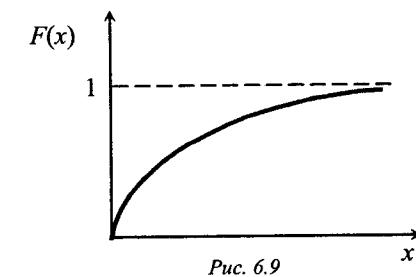


Рис. 6.9

утворює деякий кут між рухомим і нерухомим радіусом; значення цього кута – випадкова величина з рівномірним законом розподілу.

Експоненціальний розподіл. Показниковим (експоненціальним) називають розподіл імовірностей випадкової величини X , який описується функцією щільності:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

де λ – стала додатна величина.

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини дорівнюють:

$$\mathcal{M}(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$M(X) = \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Звідси видно, що показниковий розподіл визначається лише одним параметром λ .

Знайдемо інтегральну функцію розподілу показникової закону:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Отже, $F(x) = 0$ при $x < 0$ і $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$. Графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу подані на рис. 6.8 та 6.9.

Нормальний розподіл (розподіл Гаусса). Закон розподілу неперервної випадкової величини X називається нормальним, якщо щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

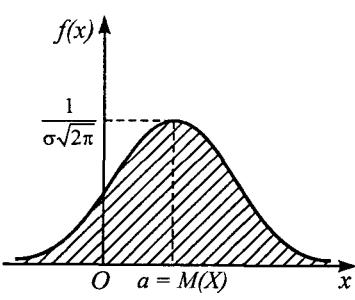


Рис. 6.10

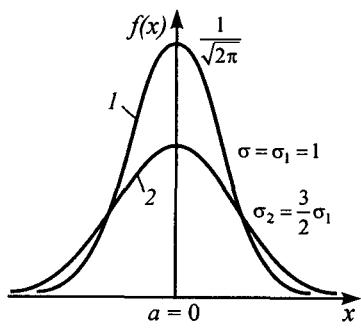


Рис. 6.11

Графік розподілу Гаусса описується симетрично відносно $a = M(X)$ кривою (рис. 6.10), σ має зміст середнього квадратичного відхилення $\sigma = \sqrt{D(X)}$. При $x = a$ ордината кривої нормальної щільності ймовірності дорівнює

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

При збільшенні σ ця ордината зменшується. При цьому крива пропорційно сплющається вздовж осі ординат так, що обмежена графіком площа залишається рівною одиниці (рис. 6.11, криві 1 і 2). Іншими словами, розкид можливих значень випадкової величини збільшується при збільшенні σ . Форма кривої Гаусса не залежить від a : при різних a вона лише паралельно зміщується вздовж осі абсцис.

Нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ та $\sigma = 1$ називають *стандартним (нормованим)*. Щільність розподілу в такому випадку дорівнює

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значення функції $\phi(x)$ наведені в табл. 1 додатку, а графік подано на рис. 6.11 (крива 1). Інтегральна функція розподілу (див. рис. 6.4) має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (6.20)$$

6.12. ЙМОВІРНІСТЬ ПОПАДАННЯ ЗНАЧЕНЬ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНІ В ЗАДАЙІ ІНТЕРВАЛ. ФУНКЦІЯ ЛАПЛАСА

Припустимо, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Тоді ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу (α, β) , дорівнює:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha/\sigma}^{\beta/\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2}} dt.$$

Зробимо підстановку $\frac{x-a}{\sigma} = t$. Тоді: $x = a + \sigma t$, а $dx = \sigma dt$. Функція щільності нормально розподіленої величини набуде при цьому нормованого виду і ми матимемо:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Отриманий інтеграл не береться в елементарних функціях, тому для його обчислення вводять функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (6.21)$$

яка називається **функцією Лапласа (інтегралом імовірностей)**.

Порівнюючи (6.20) та (6.21) з урахуванням того, що $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$, бачимо, що у випадку нормованого нормального розподілу $\Phi(x) = F(x) - \frac{1}{2}$.

Для обчислення функції Лапласа складено таблицю, наведену в додатку (табл. 2).

Основні властивості функції Лапласа.

1. $\Phi(x)$ визначена при всіх значеннях $x \in \mathbb{R}$.
2. $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
3. $\Phi(0) = 0$.
4. $\Phi(x)$ – монотонно зростаюча функція.

За допомогою функції Лапласа можна знайти ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в будь-який інтервал (α, β) числовової осі. Згідно з (6.10) та (6.21) з урахуванням виконаної раніше підстановки $t = \frac{x-a}{\sigma}$:

Людина – дитя перешкод. Чи навчилися ви радіти перешкодам?

Східне прислів'я

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1). \quad (6.22)$$

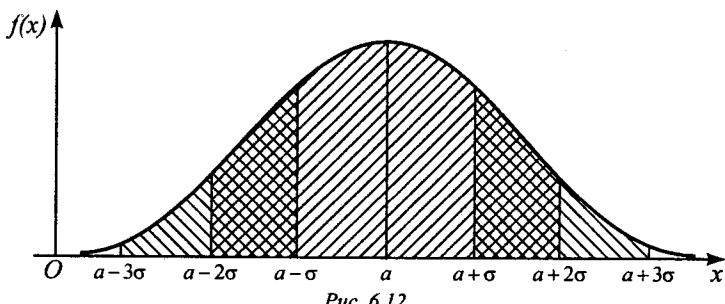


Рис. 6.12

Часто потрібно знайти ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною не перевищуватиме заданого додатного числа δ . Враховуючи (6.22) і непарність функції $\Phi(X)$, матимемо:

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (6.23)$$

Оскільки мірою розкиду значень випадкової величини є середнє квадратичне відхилення σ , то на практиці часто використовують значення δ , які кратні σ . Обчислимо:

$$P(|X - a| < \sigma) = P(a - \sigma < X < a + \sigma) = \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 0,683;$$

$$P(|X - a| < 2\sigma) = P(a - 2\sigma < X < a + 2\sigma) = \Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) = 0,954;$$

$$P(|X - a| < 3\sigma) = P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0,997.$$

Остання рівність свідчить, що майже достовірно ($P = 0,997$) випадкова величина (похибка) не відхиляться від математичного сподівання за модулем більше, ніж на 3σ . Це твердження називають **правилом трьох сигм**. Рис. 6.12 ілюструє проведені обчислення.

Приклад. Маса таблетки, що виготовляється автоматом, – випадкова величина з нормальним законом розподілу, параметри якого $a = 100$ мг, $\sigma^2 = 1/900$ мг². Знайти ймовірність браку, якщо допустимі значення $(100 \pm 0,05)$ мг.

Використавши (6.22), знайдемо ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(100 - \delta; 100 + \delta)$, де $\delta = 0,05$:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0,05}{\sigma}\right) = 2\Phi(1,5).$$

За табл. 2 додатку $\Phi(1,5) = 0,4332$. Тому $P(|X - a| < \delta) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664$. Шукана ймовірність

$$P(|X - a| > \delta) = 1 - 0,8664 = 0,1336.$$

6.13. ДЕЯКІ ІНШІ РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розподіл “ x_i – квадрат”. Припустимо, X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – нормальні розподілені незалежні випадкові величини, математичне сподівання кожної з яких дорівнює нулю, а середнє квадратичне відхилення – одиниці. Тоді сума квадратів цих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

має розподіл χ^2 (“ x_i – квадрат”) з $k = n$ ступенями вільності. Якщо ж ці величини пов’язані між собою декількома (наприклад, m) лінійними співвідношеннями, то число ступенів вільності $k = n - m$. На рис. 6.13 подано графік щільності розподілу χ^2 при $k = 4$ ступенях вільності (а) та графік функції розподілу (б). При збільшенні числа ступенів вільності розподіл χ^2 наближується до нормального.

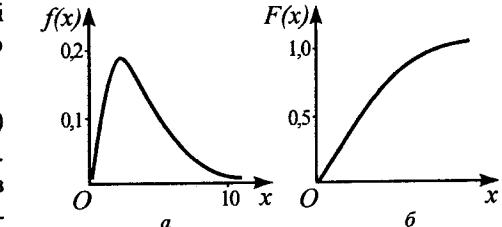


Рис. 6.13

Розподіл Стьюдента. Припустимо, що Z – нормальні розподілені нормована випадкова величина ($\mu(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$), а V – незалежна від Z величина, що має розподіл χ^2 з k ступенями вільності. Відношення нормованої нормальної величини до кореня квадратного з незалежної випадкової величини, розподіленої за законом χ^2 , поділеної на кількість ступенів вільності цього розподілу k , називають розподілом Стьюдента:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}}.$$

Розподіл Стьюдента повністю визначається числом ступенів вільності і є парною функцією. Щільність імовірності розподілу Стьюдента:

$$s(t, k) = B_k \left(1 + \frac{t^2}{k-1}\right)^{-\frac{k}{2}},$$

де B_k – коефіцієнт, який залежить від об’єму вибірки.

Графіки щільності розподілу (а) та функції розподілу (б) Стьюдента з одним ступенем

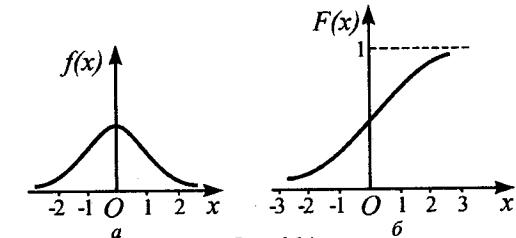


Рис. 6.14

вільності подано на рис. 6.14. При збільшенні числа ступенів вільності розподіл Стьюдента наближається до нормального.

Розподіл Фішера–Сnedекора. Припустимо, U і V – незалежні випадкові величини, які мають розподіл χ^2 із ступенями вільності k_1 та k_2 . Закон розподілу величини

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

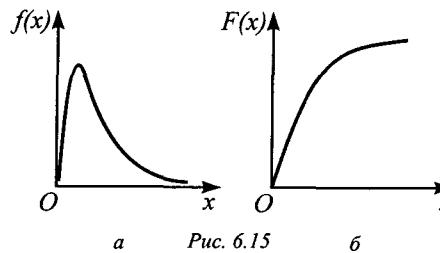


Рис. 6.15

називають розподілом Фішера–Сnedекора зі ступенями вільності k_1 та k_2 . Графіки щільності розподілу (а) та функції розподілу (б) Фішера–Сnedекора з числом ступенів вільності $k_1 = 4$, $k_2 = 4$ подано на рис. 6.15.

Той факт, що розподіли Стьюдента, χ^2 та Фішера–Сnedекора повністю визначаються числом ступенів вільності, є їхньою значною перевагою і робить їх надзвичайно корисними при розв'язуванні задач математичної статистики. Додаткову інформацію про ці закони розподілу можна знайти в розділі 8.

6.14. ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

Відомо, що нормальню розподілені величини досить часто зустрічаються на практиці. Такий розподіл має ймовірність влучення при стрільбі, похиби при вимірюваннях. Нормальному закону підпорядковується розподіл таких фізіологічних параметрів, як зріст, вага, артеріальний тиск, довжина судин, частота серцевих скорочень тощо. Чим це обумовлене? Пояснення причин широкого поширення нормального закону можна зробити на основі теореми Ляпунова (центральної граничної теореми).

Теорема. Якщо випадкова величина X може розглядатись як сума великого числа взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму несікіченно малий, то закон розподілу цієї випадкової величини X , близький до нормального, незалежно від того, які закони розподілу окремих доданків.

Припустимо, що вимірюється деяка величина. Різниця між результатом вимірювання X та істинним значенням величини a , яка вимірюється, називається похибкою. Внаслідок дії на вимірювання великої кількості факторів, які неможливо врахувати (коливання температури, механічні коливання приладу тощо), похибку вимірювань можна вважати сумаю великої кількості незалеж-

них випадкових величин, яка згідно з центральною граничною теоремою повинна мати нормальню розподіл. Якщо при цьому відсутні фактори, які призводять до систематичних похибок, то математичне сподівання випадкових похибок дорівнює нулю.

6.15. ЛОКАЛЬНА ТА ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМИ ЛАПЛАСА

Використання функції Лапласа не вичерпується випадком неперервних нормальню розподілених випадкових величин. Раніше розглядалась формула Бернуллі, яка дозволяє обчислити ймовірність того, що подія A з'явиться рівно k разів в n випробуваннях. При цьому ми вважали, що ймовірність появи події p в кожному випробуванні однакова. Легко побачити, що при великих n користуватись формuloю Бернуллі досить складно, оскільки вона вимагає виконання дій над величезними числами. **Локальна теорема Лапласа** свідчить, що асимптотичною формулою для визначення такої ймовірності ϵ (6.19) з урахуванням того, що математичне сподівання, згідно з (6.17), $a = M(X) = np$, а середнє квадратичне відхилення, відповідно до (6.18), $\sigma = \sqrt{npq}$.

Теорема. Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться рівно k разів в n випробуваннях, приблизно дорівнює значенню функції

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad (6.24)$$

де $x = \frac{k - np}{\sigma}$ – нормоване значення змінної.

Відзначимо, що для окремого випадку $p = \frac{1}{2}$ асимптотична формула була знайдена Муавром в 1730 р. В 1783 р. Лаплас узагальнив формулу Муавра для довільного p , відмінного від 0 та 1. Тому інколи формулу (6.24) називають **формулою Муавра–Лапласа**. При розрахунках за цією формулою використовують табульовані значення $\varphi(x)$, наведені в табл. 1 додатку.

Припустимо, що проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність появи події A постійна і рівна p . Як обчислити ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях не менше k_1 і не більше k_2 разів? На це запитання дає відповідь **інтегральна теорема Лапласа**.

Всяке дослідження базується на порівнянні і використовує співставлення.
Н. Кузанський

Теорема. Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна, то ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях від k_1 до k_2 разів, приблизно дорівнює визначеному інтегралу

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k_1-a}{\sigma}}^{\frac{k_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

де $a = np$, а $\sigma = \sqrt{npq}$.

Використавши прийняті позначення, запишемо цю формулу в більш зручному для використання вигляді:

$$P(k_1 < X < k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1). \quad (6.25)$$

Для розрахунків за цією формулою користуються табл. 2 додатку. Отриманий результат тим точніший, чим більша дисперсія $D = npq$ (тобто чим більше n , оскільки максимальне значення добутку $pq = 0,25$ досягається при $q = p = 0,5$).

6.16. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ЧЕБИШОВА

Теорема Чебишиова. Якщо дисперсії незалежних випадкових величин обмежені однією і тією ж постійною C , то, яким малим не було ε ($\varepsilon > 0$), ймовірність виконання нерівності $|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon$ буде як завгодно близькою до одиниці, якщо число випробувань достатньо велике:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) = 1,$$

де $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.

Таким чином, середнє арифметичне \bar{X} достатньо великого числа незалежних випадкових величин (дисперсії яких обмежені) втрачає характер випадкової величини. Теорема Чебиширова справедлива як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин і має неоціненне практичне значення. Наприклад, при вимірюванні деякої фізичної величини за істинне значення приймають середнє арифметичне результатів декількох вимірювань. В якому випадку такий підхід можна вважати вірним? Відповідь на це питання дає теорема Чебиширова. Для цього потрібно щоб: по-перше, результати вимірювань були попарно незалежними; по-друге, мали одне і те ж математичне сподівання (вимірювання проведені без систематичних похибок); по-третє,

дисперсії їх були б рівномірно обмеженими (прилад повинен забезпечувати певну точність вимірювань).

На теоремі Чебишиова базується також і широко вживаний у статистиці вибірковий метод, згідно з яким за порівнянно невеликою випадковою вибіркою роблять висновок відносно всієї сукупності досліджуваних об'єктів.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Записати повну групу подій (множину генотипів), які можуть утворюватись при скрещуванні особин типу: 1) $Aa \times Aa$ – гетерозиготи; 2) $AA \times aa$ – гомозиготи. Знайти ймовірність появи кожного з генотипів.

Розв'язання. В даній задачі ми розглядаємо генотипи і успадкування лише для однієї пари генів (успадковуються колір очей, здатність бути лівшею тощо). Генотип нащадка залежить від випадкових процесів. За будь-яких умов кожен батьківський ген може передаватись з імовірністю 0,5. Послідовні випробування незалежні.

1) У цьому випадку можливі варіанти AA , Aa , aA , aa , імовірність появи кожного з них $\frac{1}{4}$. Але, якщо між парами Aa і aA відмінностей немає, то ймовірність появи генотипу Aa визначається за теоремою додавання ймовірностей:

$$P(Aa) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, отримаємо: $P(AA) = \frac{1}{4}$; $P(Aa) = \frac{1}{2}$; $P(aa) = \frac{1}{4}$.

2) Скрещування $AA \times aa$ може привести до появи лише особин Aa , тобто в цьому випадку $P(Aa) = 1$.

2. Багато генів, зчеплених зі статтю, є рецесивними і викликають дефекти (дальтонізм, гемофілія). Нехай a – такий ген. Тоді дефект мають всі чоловіки типу a та жінки aa (жінки типу Aa дефекту не мають, але можуть передавати його потомкам). Яка ймовірність дальтонізму у жінок, якщо в середньому на 100 осіб чоловічої статі один дальтонік?

Розв'язання. Відповідно до статистичного означення ймовірність дальтонізму у чоловіків $P(a) = \frac{1}{100}$. Це є ймовірність появи гену a в парі. Ймовірність знайти пару, в якій два гени a , може бути знайдена за теоремою множення ймовірностей

$$P(aa) = P(a) \cdot P(a) = 10^{-4}.$$

Ймовірність дальтонізму у жінок 0,0001.

Проблема не може бути вирішена на тому рівні мислення, на якому вона виникла.

А. Ейнштейн

3. За статистичними даними групу крові A мають 36,9 % всіх європейців, групу B – 23,5 %, групу AB – 0,6 %, групу O – 39 %. Знайти ймовірність того, що у довільно взятого донора-європейця група крові A або B .

Розв'язання. Згідно до статистичного визначення ймовірностей $P(A) = 0,369$, $P(B) = 0,235$.

Використовуючи теорему додавання ймовірностей для несумісних подій, одержимо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,369 + 0,235 = 0,604.$$

4. Ймовірність відмови певного елемента в системі $P_i = 0,05$. Для підвищення надійності замість одного елемента в систему введено $n = 5$ аналогічних елементів. Знайти ймовірність безвідмовної роботи системи за умови, що система виходить із ладу, якщо не спрацьовують всі п'ять.

Розв'язання. Ймовірність відмови п'яти елементів визначається за теоремою множення ймовірностей

$$P = P_1^5 = 3,125 \cdot 10^{-7}.$$

Ймовірність безвідмовної роботи системи є протилежною подію і дорівнює:

$$Q = 1 - P = 1 - 3,125 \cdot 10^{-7} = 0,9999997.$$

5. На обстеження прибула група з 10 чоловік. Троє з них хворі. Лікар запрошує до кабінету по два пацієнти. Знайти ймовірність того, що вони обидва є: 1) хворі, 2) здорові.

Розв'язання. 1) Позначимо події: A – перша людина, яка заходить до лікаря, хвора; B – друга людина хвора.

Події залежні, тому теорему множення ймовірностей запишемо вигляді

$$P(A \text{ i } B) = P(A) \cdot P_A(B),$$

$$\text{де } P(A) = \frac{3}{10}; P_A(B) = \frac{2}{9}.$$

$$\text{Отже, } P(A \text{ i } B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

2) Analogічно C – перший пацієнт здоровий, D – другий здоровий:

$$P(C \text{ i } D) = P(C) \cdot P_C(D) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}.$$

6. В сім'ї троє дітей. Враховуючи, що ймовірність народження хлопчика 0,52, знайти ймовірність того, що в сім'ї: 1) три хлопчики, 2) діти однієї та другої статі.

Розв'язання. Оскільки стать кожної наступної дитини не залежить від статі попередньої (це є припущення), то ми маємо справу з незалежними подіями.

1) Ймовірність того, що всі троє дітей – хлопчики, може бути визначена за теоремою множення ймовірностей

$$P(X \cap X \cap X) = 0,52 \cdot 0,52 \cdot 0,52 = (0,52)^3 = 0,14.$$

2) Подія, яка полягає в тому, що в сім'ї є діти двох статей, є протилежною до події, яка полягає в тому, що в сім'ї лише хлопчики або лише дівчатка. Тому шукана ймовірність P визначається

$$P = 1 - [P(X \cap X \cap X) + P(D \cap D \cap D)],$$

де $P(X \cap X \cap X)$ – імовірність того, що в сім'ї лише хлопчики; $P(D \cap D \cap D) = (0,48)^3$ – імовірність того, що в сім'ї лише дівчатка.

$$\text{Шукана ймовірність } P = 1 - (0,52)^3 - (0,48)^3 = 0,75.$$

7. Знайти ймовірність того, що в сім'ї з п'яти дітей двоє хлопчиків. Вважати, що ймовірність народження хлопчика 0,52 і стать наступної дитини не залежить від статі попередньої.

Розв'язання. Використаємо формулу Бернуллі (6.9):

$$P = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{n!}{m! (n-m)!} p^2 q^3,$$

де $q = 1 - p$; $n = 5$; $m = 2$. Тоді $q = 1 - p = 1 - 0,52 = 0,48$.

Отже

$$P = \frac{5!}{2!3!} \cdot (0,52)^2 \cdot (0,48)^3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (0,52)^2 (0,48)^3 = 0,299.$$

8. Великій кількості людей N потрібно зробити аналіз крові на певне захворювання. Для цього утворюють групи по k осіб. Проби крові людей, що входять до однієї групи, змішуються і аналізується суміш. Якщо результат негативний, то одного аналізу досить для k осіб. Якщо ж він позитивний, то кров кожного з k людей потрібно дослідити окремо і для k людей необхідно виконати $k+1$ аналіз.

Вважаючи, що ймовірність p позитивного аналізу одна і та ж, а результати аналізів для різних людей стохастично незалежні, знайти ймовірність того, що аналіз змішаної крові k осіб дасть позитивний результат.

Розв'язання. Знайдемо ймовірність того, що результат в групі буде негативний. Згідно з теоремою множення ймовірностей для незалежних подій

$$Q = (1 - p)^k = q^k,$$

де $q = 1 - p$ – імовірність негативного результату для однієї особи.

Оскільки подія “результат позитивний” є протилежною до події “результат негативний”, то ймовірність позитивного результату в групі з k осіб

$$P = 1 - Q = 1 - q^k = 1 - (1 - p)^k.$$

9. Задати закон розподілу кількості аналізів (випадкова величина X) при способі обстеження з прикладу 8, якщо загальна кількість осіб, яких треба обстежити, $n = 50$, ймовірність захворювання $p = 0,02$.

Розв'язання. Припустимо, що утворено п'ять груп по $k = 10$ осіб в кожній. Ймовірність негативного результату аналізу в групі $Q = (1 - 0,02)^{10} = 0,8$. Ймовірність позитивного результату аналізу в групі

$$P = 1 - (1 - 0,02)^{10} = 1 - 0,98^{10} = 0,19.$$

Випадкова величина X може набувати таких значень: $X_0 = 5$ – серед обстежених 50 осіб хворих немає; $X_1 = 15$ – хворі є в одній з п'яти груп; $X_2 = 25$ – хворі є в двох; $X_3 = 35$ – хворі є в трьох; $X_4 = 45$ – хворі є в чотирьох із п'яти груп; $X_5 = 55$ – хворі є в усіх групах. Закон розподілу задамо табличним способом.

Кількість груп, де є хворі	0	1	2	3	4	5
X	5	15	25	35	45	55
P	0,364	0,4	0,18	0,04	0,02	0,0002

Імовірності P_i обчислювались за формулою (6.9):

$$\begin{aligned} P_0 &= q^{50} = (1 - p)^{50} = Q^5 = 0,364; \quad P_1 = C_5^1 P Q^4 = 0,4; \quad P_2 = C_5^2 P^2 Q^3 = 0,181; \\ P_3 &= C_5^3 P^3 Q^2 = 0,04; \quad P_4 = C_5^4 P^4 Q = 0,02; \quad P_5 = P^5 = 0,0002, \end{aligned}$$

$$\text{де } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

10. Знайти середню кількість аналізів, які необхідно зробити при обстеженні півмільйонного міста, використовуючи метод, вибраний у прикладах 8, 9.

Розв'язання. Середня кількість аналізів при достатньо великій кількості випробувань приблизно дорівнює математичному сподіванню випадкової величини. За формулою (6.19)

$$\begin{aligned} M(X) &= 5 \cdot 0,364 + 15 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,18 + 35 \cdot 0,04 + 45 \cdot 0,02 + \\ &+ 55 \cdot 0,0002 \approx 14,6. \end{aligned}$$

Обчислимо дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$:

$$\begin{aligned} D(X) &= 0,364 \cdot (14,6 - 5)^2 + 0,4 \cdot (14,6 - 15)^2 + 0,18 \cdot (14,6 - 25)^2 + \\ &+ 0,04 \cdot (14,6 - 35)^2 + 0,02 \cdot (14,6 - 45)^2 + 0,0002 \cdot (14,6 - 55)^2 \approx 156; \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 12,5.$$

Проведені обчислення дозволяють стверджувати, що середня кількість аналізів крові, які треба виконати, щоб обстежити 500 000 жителів міста

(нагадаємо, що в прикладах 8 і 9 $n = 50$, тобто в 10^4 разів менше), становить $(14,6 \pm 12,5) \cdot 10^4$ аналізів.

Примітка. Вказаній приклад базується на методиці, запропонованій Р. Дорфманом під час другої світової війни. Використовуючи свою методику в армійській практиці, Р. Дорфман добився економії на 80%. Можна показати (проте, ця задача виходить за рамки нашої програми), що математичне сподівання буде мінімальним, якщо

$$k = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

В умові нашого прикладу $p = 0,02$, а значить $k \approx 7,14$. Тобто кількість аналізів при ймовірності захворювання $p = 0,02$ буде мінімальною, якщо спільні обстеження проводити в групах з 7 – 8 осіб.

11. Вакцина формус імунітет від захворювання з імовірністю 0,999. Яка ймовірність, що імунітету не набуло двоє, якщо вакцину ввели 4000 дітям? Задати закон розподілу випадкової величини X , яка дорівнює кількості дітей, що не набули імунітету. Знайти моду цього розподілу.

Розв'язання. В даному прикладі зручно скористатись законом рідкісних подій (розподіл Пуассона), тому що ймовірність реалізації випадкової події в окремому випробуванні досить мала:

$$q = P(A) = 1 - 0,999 = 0,001.$$

Враховуючи, що в нашому випадку $\lambda = n \cdot q = 4000 \times 0,001 = 4$, згідно з розподілом Пуассона, шукана ймовірність

$$P = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \approx 0,147.$$

Аналогічно розрахуємо ймовірності інших значень випадкової величини X . Результати подамо у вигляді таблиці.

X	0	1	2	3	...
P	$e^{-\lambda} = 0,018$	$\lambda e^{-\lambda} = 0,073$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = 0,147$	$\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0,196$...

Модою буде значення $X = 3$, оскільки ймовірності інших значень менші за 0,196, в чому можна легко переконатись продовживши розрахунки.

12. Побудувати графік функції розподілу дискретної випадкової величини, яка задана таблицею.

X	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Розв'язання. При $x \leq 1$ функція розподілу $F(x)$ згідно з властивістю 3 дорівнює нулю. Якщо $1 < x \leq 4$, то $F(x) = 0,3$, оскільки випадкова величина може набути значення $X = 1$ з імовірністю 0,3. Якщо $4 < x \leq 8$, то $F(x) = 0,4$; в цьому випадку X може набувати значення або 1, або 4. За теоремою додавання ймовірностей: $0,1 + 0,3 = 0,4$.

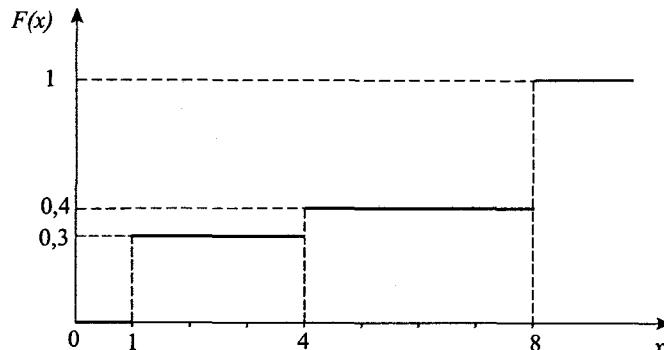


Рис. 6.16

Якщо $x > 8$, то $F(x) = 1$. Ця подія є достовірною. Отже

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ 0,3 & \text{при } 1 < x \leq 4; \\ 0,4 & \text{при } 4 < x \leq 8; \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

Графік цієї функції подано на рис. 6.16.

13. Випадкова величина X має нормальній закон розподілу з параметрами $a = 2$, $\sigma = 4$. Визначити ймовірність того, що значення X лежить в межах інтервалу $(0; 8)$.

Розв'язання. Скористаємося (6.22) та табл. 2 додатку значень функції Лапласа. Для цього знайдемо t_1 та t_2 :

$$t_1 = (0 - 2) / 4 = -1/2; \quad t_2 = (8 - 2) / 4 = 3/2.$$

Враховуючи непарність функції Лапласа, за табл. 2 $\Phi(t_1) = -\Phi(0,5) = -0,191$, а $\Phi(t_2) = 0,433$. Тоді $P(0 < x < 8) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 0,624$.

14. Ймовірність браку при виробництві деякого препарату $P = 0,01$. Знайти ймовірність того, що в партії з 1000 виробів виявиться бракованими не більше 20.

Розв'язання. В даному випадку використаємо інтегральну теорему Лапласа. Для цього спочатку обчислимо t_2 та t_1 :

$$t_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 0,01 \cdot 1000}{\sqrt{0,01 \cdot 1000 \cdot 0,99}} \approx 3,2;$$

$$t_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 0,01 \cdot 1000}{\sqrt{0,01 \cdot 1000 \cdot 0,99}} \approx -3,2.$$

За табл. 2 додатку знайдемо $\Phi(3,2) = 0,499$. Враховуючи непарність функції Лапласа, згідно з (6.25) маємо:

$$P(0 < x < 20) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 2\Phi(3,2) = 0,998.$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює 99,8 %.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. В ящику знаходиться 10 кульок: 3 білі та 7 чорних. З нього навздогад витягають одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька буде білою? Чорною?
2. В умові задачі 1: витягують чорну кульку і не повертають в ящик. Яка ймовірність витягнути після цього чорну кульку? Білу?
3. В умові задачі 1: дістали білу кульку і не повернули в ящик. Яка ймовірність дістати після цього чорну кульку? Білу?
4. В ящику знаходиться 10 кульок: 2 білі, 4 чорних, 1 червона та 3 сині. Знайти ймовірність появи білої, або чорної, або червоної кульки при одноразовій операції витягування кульки з ящика. Вказати різні способи розв'язання. Використовуйте поняття «протилежні події».
5. Яка ймовірність того, що в сім'ї з двома дітьми будуть діти різної статі? Ймовірність народження хлопчика 0,52, стать наступної дитини не залежить від статі попередньої.
6. Яка ймовірність того, що в сім'ї з чотирма дітьми будуть діти різної статі?
7. Захворювання вдається вилікувати у 96% хворих, причому у 85% не спостерігається рецидивів. Яка ймовірність того, що у хворого, взятого на вмання з даним діагнозом, не буде рецидивів?
8. Знайти ймовірність сумісної появи герба при одному киданні двох монет?
9. В ящику 8 кульок: 3 білі і 5 чорних. Знайти ймовірність того, що послідовно одна за одною буде витягнено дві чорні кульки? Дві білі кульки?
10. На кожні 10 000 лотетів лотереї розігрується 150 речових і 350 грошових виграшів. Яка ймовірність виграти, байдуже речового чи грошового, у власника одного лотерейного білета?
11. При лікуванні захворювання використовуються три лікарські препарати, кожен з яких дає алергічні реакції у 1% випадків. Яка ймовірність, що у хворого, выбраного довільним чином, не буде алергії при прийомі трьох препаратів одночасно?
12. В лікарню поступають пацієнти з чотирма видами хвороб. Багаторічні спостереження показують, що цим групам захворювань відповідають імовірності: 0,1; 0,4; 0,3 та 0,2. Для лікування захворювань, які мають імовірності 0,1 та 0,2, необхідно переливання крові. Яку приблизно кількість хворих слід забезпечити кров'ю, якщо протягом місяця поступило 1000 хворих?

13. В сім'ї двоє дітей. Враховуючи, що ймовірність народження хлопчика 0,52, визначити ймовірність того, що в сім'ї: а) двоє хлопчиків; б) хоча б одна дівчинка; в) старша дитина – дівчинка, а менша – хлопчик; д) один хлопчик.

14. Яка ймовірність того, що при випадковому сполученні літер Т, А та К одержимо “ТАК”? Не вийде слово “ТАК”?

15. У 97 % пацієнтів при прийомі певного лікарського препарату спостерігається зниження кров'яного тиску, при цьому у 0,2 % пацієнтів виникають алергічні реакції. Записати повну групу подій, які можуть спостерігатись при прийомі даного препарату. Яка ймовірність алергії за відсутності бажаних наслідків (зниження кров'яного тиску)?

16. Ймовірність влучення стрілком в десятку дорівнює 0,3, а в дев'ятку – 0,7. Визначити ймовірність того, що цей стрілок при трьох пострілах набере не менше 29 очок.

17. Медична сестра обслуговує в палаті чотирьох хворих. Ймовірність того, що протягом години перший хворий зажадає уваги сестри 0,2, другий – 0,3, третій – 0,25, четвертий – 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом години всі четверо хворих зажадають уваги.

18. В ящику знаходиться 7 чорних і декілька білих кульок. Яка ймовірність витягнути білу кульку, якщо ймовірність дістати чорну кульку дорівнює 1/6? Скільки білих кульок в ящику?

19. Під час епідемії в населеному пункті 60 % мешканців виявились хворими. З кожних 100 хворих 10 потребують термінової медичної допомоги. Знайти ймовірність того, що будь-якому навмання взятому мешканцю необхідна термінова медична допомога.

20. Ймовірність влучення стріли в мішень $p = 0,9$. Знайти ймовірність трьох влучень при трьох пострілах?

21. Ймовірність влучення в мішень $p = 0,8$. Яка ймовірність, що при трьох пострілах не буде жодного влучення?

22. Ймовірність того, що стрілок при одному пострілі виб'є 10 очок дорівнює 0,1; імовірність вибити 9 очок дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що при одному пострілі стрілок виб'є не менше 9 очок?

23. Першу групу крові має 37 % європейців. Скільки донорів потрібно, щоб з імовірністю не меншою, ніж 0,9, отримати кров даної групи?

24. Для провізорської практики на 30 студентів виділено 15 місць в Києві, 8 – у Львові, 7 – у Харкові. Яка ймовірність того, що два довільним чином вибрані студенти попадуть на практику в одне місто?

25. Серед 18 пацієнтів у двох негативний резус-фактор. Знайти ймовірність того, що серед двох довільним чином вибраних виявиться негативний резус-фактор.

26. Студент вивчив 70 % екзаменаційних питань. Яка ймовірність отримати позитивну оцінку? В білеті три питання, оцінка позитивна, якщо відсоток правильних відповідей перевищує 60 %.

27. У відділенні 30 % хворих крім основних ліків призначили фізіотерапевтичні процедури. Ймовірність одужання в 10-денний термін хворих цієї групи 0,95, інші хворі одужують у цей термін з імовірністю $p = 0,70$. Деякий пацієнт одужав у 10-денний термін. Яка ймовірність, що він проходив курс фізіотерапевтичних процедур?

28. В діагностичний центр в рівних кількостях потрапляють пацієнти з трьох консультативних пунктів. Ймовірність, що діагноз буде підтверджено для пацієнтів з направлennям первого пункту 0,8, з другого – 0,5; третього – 0,4. В одного пацієнта діагноз підтвердився. Яка ймовірність, що він був направленний першим пунктом?

29. Хворому потрібне переливання крові. Ймовірність, що кров взятого навмання донора виявиться придатною, $p = 0,2$. Яка ймовірність, що з 10 донорів хоча б у одного група крові буде придатною?

30. В аптекі є два лікарських препарати, які можуть бути використані при даному захворюванні. Ймовірність позитивного результату при використанні первого препарата 0,8; другого – 0,9. Яка ймовірність того, що взятої навмання препарат дасть позитивний результат?

31. В сім'ї є п'ятеро дітей. Яка ймовірність того, що двоє з них хлопчики? Вважати ймовірності народження хлопчика і дівчинки рівними 0,52 та 0,48 відповідно.

32. Ймовірність витрати понад норму деякого компонента за добу 0,1. Яка ймовірність, що за тиждень перевитрат не буде протягом чотирьох діб?

33. Кожен із двох стрільців зробив по одному пострілу. Ймовірність враження цілі першим $p_1 = 0,8$; другим $p_2 = 0,3$. Об'єкт вражений одним влучанням. Яка ймовірність того, що влучив перший стрілок?

34. Серед донорів, які здають кров, 8 чоловік мають першу групу крові, 5 чоловік – другу, 5 чоловік – третю, 3 чоловіки – четверту. Чому дорівнює ймовірність того, що серед двох донорів, які першими здали кров: а) обидва донори були з четвертою групою крові; б) хоч би один донор був з третьою групою крові?

35. Показати, що ймовірність отримати хоча б одну одиницю при киданні 4 гральних кубиків більша, ніж імовірність отримати хоча б одну пару одиниць при 24 киданнях двох кубиків.

36. Посилаючись на багаторічні спостереження, виклик лікаря в деякий будинок оцінюється ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що з п'яти викликів лікаря два виклики будуть в даний будинок.

Бог з тими, хто терпляче трудиться.
Арабське прислів'я

37. З десяти облігацій в середньому виграє одна. Яка ймовірність того, що з двадцяти облігацій виграє лише одна?

38. Хворому необхідно зробити переливання крові. Ймовірність того, що група крові виявиться придатною $P(A) = 0,3$. Знайти ймовірність того, що з п'яти донорів у двох груп виявиться придатною.

39. Стрілок при одному пострілі влучає в ціль з імовірністю 0,8. Визначити ймовірність 7 влучень в серії з 10 пострілів.

40. Вважаючи всі комбінації статі дітей рівноімовірними, знайти, яку долю серед сімей з шістьма дітьми складають сім'ї з двома хлопчиками.

41. Яка ймовірність того, що дні народження шести людей припадають на 2 місяці, залишаючи рівно 10 місяців вільними? Вважати, що всі місяці народження рівноімовірні і незалежні.

42. Викладач університету був оштрафований 12 разів за стоянку автомобіля в забороненому місці. Всі 12 штрафів накладались у вівторок та в четвер. Знайти ймовірність цієї події. Чи має сенс орендувати гараж на вівторок та четвер?

43. Знайти ймовірність того, що: а) дні народження 12 людей припадуть на 12 різних місяців року (вважати, що всі місяці рівноімовірні); б) дні народження 6 людей припадуть на 2 місяці року.

44. Встановлено, що особи з певної групи людей захворюють в середньому двічі на рік. Враховуючи, що кожне захворювання триває 10 днів, одержимо $365 - 2 \cdot 10 = 345$ днів, коли людина здорована. Таким чином, можна оцінити ймовірність захворювання однієї людини як $P = 2/345 = 0,0058$. Яка ймовірність того, що з 10 чоловік сьогодні захворіють троє? Захворювання в цій задачі розглядаються як незалежні події (без урахування інфекцій).

45. В сім'ї чотири сестри по черзі миють посуд. З чотирьох розбитих тарілок три було розбито найменшою, за що її називають незграбною. Чи можна її вправдати, вважаючи явище випадковим?

46. Лівіші складають в середньому 1 % населення. Яка ймовірність, що в колективі з 200 чоловік буде 3 лівші?

47. Лікування певного захворювання приводить до повного одужання у 75 %. Лікувалось п'ять осіб. Яка ймовірність, що повністю одужають четверо? Записати закон розподілу випадкової величини X , яка визначає повне одужання певної кількості m ($m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) із вказаної групи пацієнтів.

48. Розв'язати задачу 8 (с. 131) за умови, що обстежується 70 чоловік, яких ділять на 10 груп по 7 осіб.

49. В грошовій лотереї випущено 100 білетів. Розігрується 1 вигравш в 50 грн і 10 вигравшів в 1 грн. Знайти закон розподілу випадкового виграншу для власника одного лотерейного білета. Обчислити математичне сподівання одержаної випадкової величини.

50. Знайти розподіл випадкової величини, яка одержується при киданні правильного однорідного кубика з пронумерованими гранями 1, 2, 3, 4, 5, 6. Перевірити, чи виконується умова нормування.

51. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини за умовою задачі 50.

52. Кидаюти два гральних кубики. Очки, які випадають, додаються. Записати закон розподілу випадкової величини X , яка дорівнює цій сумі. Знайти її математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення. Визначити ймовірність виграншу, якщо він виплачується при $X > 10$. Яка ймовірність $P(X > 5)$ чи $P(7 < X < 8)$ більша?

53. Закон розподілу випадкової величини X задано таблицею.

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Знайти дисперсію та математичне сподівання.

54. Закон розподілу випадкової величини X задано таблицею.

X	2	4	6
P	0,7	0,2	0,1

Визначити математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення.

55. Неперервна випадкова величина X визначається щільністю ймовірності $f(x)$. Знайти константу a , $M(X)$, $D(X)$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ ax & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

56. Дискретна випадкова величина має п'ять можливих значень. Чотири з них дорівнюють $-2; -1; 1; 2$, а відповідні їм імовірності $0,1; 0,3; 0,2; 0,2$. Знайти закон розподілу та дисперсію, якщо $M(X) = 0,7$.

57. Випадкова величина X має функцію розподілу:

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

$$\text{б) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3} & \text{при } -1 \leq x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення з інтервалу $(0; 1)$, а також $M(X)$, $D(X)$.

58. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{4} & \text{при } -2,5 \leq x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу, побудувати графік.

59. Ймовірність влучення при пострілі $p = 0,8$. Стрільба ведеться до першого влучення. Число витрачених снарядів – випадкова величина X . Скласти таблицю її розподілу, якщо в розпорядженні три снаряди.

60. Випадкова величина має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1; \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{2}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Знайти її математичне сподівання.

61. Випадкова величина має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{2}; \\ a \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a . Побудувати графік щільності розподілу.

62. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \frac{1 - \cos x}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi; \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Визначити щільність розподілу, побудувати графік.

63. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, яка має щільність розподілу $f(\alpha) = a \sin x$ в інтервалі $(0; \pi)$.

64. До випадкової величини додали константу C . Як при цьому змінятся математичне сподівання та дисперсія?

65. Ріст дорослої жінки є випадковою величиною, що має нормальну закон розподілу з параметрами: $a = 164$ см, $\sigma = 5,5$ см. Знайти щільність розподілу ймовірностей. Яка ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу $(160-170$ см)?

66. Випадкова величина X описується нормальним законом розподілу з параметрами $a = 6$ і $\sigma = 2$. Знайти ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу $(4; 8)$.

67. Випадкова величина X має нормальну закон розподілу з $a = 0,5$ і $D(X) = 1/8$. Визначити ймовірність того, що значення X випадкової величини попаде в інтервал $(0,4; 0,6)$.

68. Випадкова величина X описується нормальним законом розподілу з параметрами $a = 2$ і $\sigma = 1$. Знайти ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу $(1,5; 3)$.

69. При зважуванні маса речовини є випадковою величиною, що має нормальну закон розподілу з параметрами $a = 10$ мг, $\sigma^2 = 1/400$ мг². Знайти ймовірність браку, якщо допустимі параметри $10 \pm 0,05$ мг.

70. Під час епідемії ймовірність того, що покупцю в аптекі знадобляться ліки від грипу, дорівнює 0,4. Знайти наймовірнішу кількість таких покупок серед 500 покупців в аптекі. Яка ймовірність, що буде продано більше 200 препаратів?

71. Серед насіння лікарської рослини 0,1 % насіння бур'яну. Яка ймовірність, що з 1000 насінин 5 – бур'яни; не більше 10 – бур'яни?

72. Випадкова величина розподілена рівномірно на відрізку $[-2; 8]$. Знайти щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсію та ймовірність попадання в інтервал $[0; 2]$.

73. Випадкова величина має показниковий розподіл з дисперсією $D(X) = 0,25$. Знайти щільність розподілу та ймовірність попадання значень цієї величини в інтервал $[1; 10]$.

74. Випадкова величина має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$. Знайти ймовірність $P(X > M(X))$.

75. Ймовірність безвідмової роботи технологічної лінії розподілена за показниковим законом з $\lambda = 0,001$. Знайти ймовірність безвідмової роботи протягом перших 100 годин. Яка ймовірність, що лінія відмовить протягом перших 10 годин?

ВИБІРКОВИЙ МЕТОД. ЗНАХОДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК РОЗПОДІЛУ

7.1. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Математична статистика – розділ прикладної математики, в якому методами теорії ймовірностей досліджують результати спостережень та експериментів (статистичні дані) з метою одержання наукових і практичних висновків.

На практиці ми завжди маємо справу з обмеженою кількістю експериментальних даних, тому результати спостережень містять певний елемент випадковості. Важливо встановити, які властивості дослідженого явища дійсно притаманні йому, а які є випадковими, і проявляються в даному спостереженні лише внаслідок обмеженості обсягу експериментальних даних. Із задачею знаходження законів розподілу та оцінкою параметрів цих законів тісно пов’язані проблеми точності та надійності. Завдяки математичній статистиці розроблено ряд спеціальних методів та прийомів для розв’язування таких та подібних задач. До основних задач математичної статистики відносять:

- розробку способів збирання і групування статистичних даних;
- встановлення виду функції розподілу випадкової величини та оцінку параметрів розподілу; встановлення наявності зв’язку між випадковими величинами тощо;
- перевірку гіпотез про вид функції розподілу або про значення параметрів невідомого розподілу.

Елементи математичної статистики використовувались в медицині з часів сивої давнини. На основі спостережень та експериментів лікарі робили висновки про вплив різноманітних факторів (антропологічних, соціальних, екологічних) на здоров’я людини, поширення та перебіг хвороб, оцінювали ефективність лікувальних методик та препаратів. Широке використання методів математичної статистики в біології та медицині обумовило виникнення спеціальної наукової дисципліни – біометрії.

Методи статистичного аналізу використовуються при виробництві фармацевтичних препаратів з метою оптимізації технологічних процесів, для контролю якості продукції, в маркетингових дослідженнях для визначення потреб у лікарських препаратах та аналізу тенденцій на фармацевтичному ринку.

Впровадження нових інформаційних технологій обумовило створення великої кількості баз даних та автоматизованих систем медичної інформації,

обробка якої потребує знання методів математичної статистики. Водночас широке використання ПЕОМ стимулювало появу ряду програм, які значно полегшують обробку статистичних даних, роблять доступними методи математичної статистики широкому колу користувачів. Як інструмент для розв’язання статистичних задач, автори рекомендують зручну у використанні програму Microsoft Excel, якою оснащені практично всі сучасні ПЕОМ. У цьому розділі міститься інформація про можливості цієї програми та посилення на джерела, в яких можна знайти детальну інформацію з її використання.

7.2. ГЕНЕРАЛЬНА СУКУПНІСТЬ ТА ВИБІРКА

Припустимо, що потрібно вивчити сукупність об’єктів однієї природи (цю множину називають **генеральною сукупністю**) відносно деякого якісного або кількісного параметра. Якщо суцільне обстеження неможливе, то з усієї сукупності вибирають для вивчення частину об’єктів.

Множина випадково відібраних з генеральної сукупності об’єктів називається **вибіркою**.

Число об’єктів генеральної сукупності та вибірки називають відповідно **об’ємом генеральної сукупності** та **об’ємом вибірки**.

Наприклад, фармацевтичне підприємство випускає 10 000 препаратів певного типу протягом місяця. Комісія бажає з’ясувати якість цієї продукції. Для цього досить обстежити, наприклад, 40 об’єктів. Результати обстеження дають можливість зробити висновок про генеральну сукупність. Суть методів математичної статистики полягає в тому, щоб на основі відносно невеликої кількості обстежень зробити правильний висновок про явище, процес у цілому.

Якщо об’єкти вибірки не повертаються в генеральну сукупність, то вибірка називається безповторною, в іншому випадку – повторною. На практиці частіше користуються безповторною вибіркою.

Статистика – універсальна методологічна наука, яка в змозі вимірювати причинно-наслідкові залежності.

В. В. Швирков

Властивості об’єктів вибірки повинні правильно відображати властивості об’єктів генеральної сукупності, тобто вибірка повинна бути репрезентативною (представницькою). Вважається, що вибірка **репрезентативна**, якщо всі об’єкти з однаковою ймовірністю можуть попасті у вибірку.

Припустимо, що з генеральної сукупності зроблена вибірка, причому x_1 – спостерігалося n_1 разів, x_2 – n_2 разів, x_k – n_k разів і $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ – об’єм вибірки. Значення x_1, x_2, \dots, x_k , які спостерігаються, називають **варіан-**

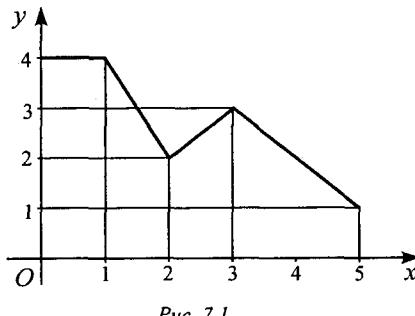


Рис. 7.1

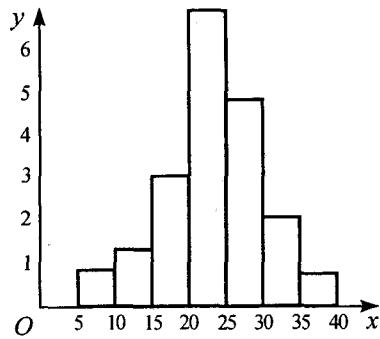


Рис. 7.2

тами, а послідовність варіант у порядку зростання – **варіаційним рядом**, кількість випадків, в яких вони спостерігаються, $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ – частотами, а їх відношення до об’єму вибірки – **відносними частотами варіант**

$$p_i = \frac{n_i}{n}.$$

Відзначимо, що сума відносних частот дорівнює одиниці:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Статистичним розподілом вибірки називають сукупність варіант та відповідних їм частот або відносних частот. Статистичний розподіл можна задати також у вигляді послідовності інтервалів та відповідних їм частот. Це роблять при неперервному розподілі або при великій кількості варіант. Частотою, що відповідає даному інтервалові, в такому випадку вважають суму частот варіант, які входять до цього інтервалу.

Для графічного зображення статистичного розподілу використовують полігони та гістограми. Для побудови **полігона** (рис. 7.1) на осі Ox відкладають значення варіант, а на осі Oy – значення частот n_i (або відносних частот p_i). Полігоном, як правило, користуються у випадку невеликої кількості варіант. При великій кількості варіант та у випадку неперервного розподілу будують **гістограми** (рис. 7.2). Для цього інтервал отриманих значень величини x розбивають на часткові інтервали однакової довжини h і підраховують суму частот варіант n_i , які попали в даний інтервал. Потім на цих інтервалах, як на основах, будують прямокутники з висотами $\frac{n_i}{h}$ (або $\frac{n_i}{n}$, де n – об’єм вибірки).

Таким чином, площа окремого прямокутника дорівнює n_i (або p_i), а площа гістограми дорівнює сумі всіх частот (або відносних частот), тобто об’єму вибірки (або одиниці).

Практика показує, що розбиття на інтервали доцільно робити таким чином, щоб частота в кожному із них була не меншою 5, а кількість інтервалів не перевищувала 15.

При необмеженому збільшенні об’єму вибірки і зменшенні довжини часткових інтервалів h гістограма перетворюється в графік щільності розподілу.

Порівнюючи гістограму з графіком щільності типових розподілів можна зробити припущення стосовно закону розподілу досліджуваної величини.

Щоб мати уявлення про інтегральну функцію розподілу, будують емпіричну функцію – кумуляту.

Кумулятою називають функцію $F^*(x)$, яка дорівнює сумі частот (або відносних частот) величин X , що мають значення менше, ніж x :

$$F^*(x) = \frac{m(x)}{n},$$

де $m(x)$ – кількість спостережень, при яких $X < x$; n – об’єм вибірки.

Кумулята має всі властивості інтегральної функції розподілу (див. п. 6.8).

7.3. ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ ЗА ЇЇ ВИБІРКОЮ

Звичайно, в розпорядженні дослідника є лише дані вибірки, через які потрібно оцінити параметри генеральної сукупності. Припустимо, що кожен об’єкт генеральної сукупності має деяку кількісну ознаку X . Будемо розглядати вибір об’єкта генеральної сукупності як випробування, X – як випадкову величину, а x_i – як одне із можливих значень X .

Припустимо, з теоретичних міркувань вдалось встановити, до якого типу розподілу відноситься ознака X . Природно, виникає задача оцінити (приблизно визначити) параметри, які характеризують цей розподіл. Позначимо через Θ один з невідомих параметрів будь-якого розподілу. Наприклад, якщо відомо, що ознака X має нормальній розподіл, то потрібно оцінити математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення, а це означає, що Θ – це або a , або b . При експоненціальному розподілі, який, як відомо, визначається одним параметром λ , Θ – це λ .

Статистичною оцінкою Θ^* невідомого параметра Θ закону розподілу називають певну функцію від випадкових величин x_1, x_2, \dots, x_n , які отримані в результаті n незалежних спостережень.

Щоб статистичні оцінки давали “добре” наближення, вони повинні задовольняти певним вимогам, а саме: бути незміщеними, ефективними і спроможними.

Статистичну оцінку Θ^* називають **незміщеною**, якщо її математичне сподівання дорівнює параметру, що оцінюється:

$$M(\Theta^*) = \Theta. \quad (7.1)$$

В іншому випадку, оцінка зміщена. Умова (7.1) гарантує захист від систематичних помилок, наприклад, похибок вимірювання.

Незміщена оцінка невідомого параметра дає хороший результат, якщо розкид значень Θ_n^* не дуже великий, тобто дисперсія $D(\Theta_n^*)$ – мала. Оцінку, яка при заданому об'ємі вибірки має найменшу із можливих дисперсію, називають **ефективною**.

Спроможною називають статистичну оцінку, яка при великому об'ємі вибірки ($n \rightarrow \infty$), прямує по ймовірності до оцінюваного параметра. Наприклад, якщо дисперсія незміщеної оцінки при $n \rightarrow \infty$ прямує до нуля ($\lim_{n \rightarrow \infty} D(\Theta_n^*) = 0$), то така оцінка є спроможною.

Найбільш поширеними загальними методами, що використовуються для відшукання оцінок параметрів розподілу, є: метод найменших квадратів, метод моментів, метод найбільшої правдоподібності [3, 14].

7.4. ГЕНЕРАЛЬНА ТА ВИБІРКОВА ДИСПЕРСІЇ. СТАНДАРТ

Генеральною середньою \bar{x}_r називають середнє арифметичне значень ознаки генеральної сукупності:

$$\bar{x}_r = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}. \quad (7.2)$$

Генеральна середня \bar{x}_r дорівнює математичному сподіванню випадкової величини. Це випливає з порівняння (7.2) та (6.13) із врахуванням того, що ймовірність появи будь-якого значення генеральної сукупності дорівнює $\frac{1}{N}$. На практиці \bar{x}_r наявість, її оцінкою служить вибіркова середня \bar{x}_b .

Вибірковою середньою \bar{x}_b називають середнє арифметичне значень ознаки вибіркової сукупності:

$$\bar{x}_b = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (7.3)$$

якщо частоти варіант відмінні від одиниці, то

$$\bar{x}_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i,$$

де k – кількість різних варіант, які мають відповідно частоти n_1, n_2, \dots, n_k .

Можна переконатись, що вибіркова середня \bar{x}_b є незміщеною оцінкою, тобто її математичне сподівання дорівнює генеральній середній \bar{x}_r :

$$M(\bar{x}_b) = \bar{x}_r = a,$$

де $M(\bar{x}_b) = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k}{k}$, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ – значення вибіркової середньої для k різних вибірок з генеральної сукупності.

При збільшенні об'єму вибірки вибіркова середня прямує по ймовірності до генеральної середньої, а це означає, що вибіркова середня є спроможною оцінкою генеральної середньої.

Щоб охарактеризувати розсіювання значень кількісної ознаки X генеральної сукупності навколо свого середнього значення \bar{x}_r , вводять узагальнену характеристику – генеральну дисперсію.

Генеральною дисперсією D_r називають середнє арифметичне квадратів відхилень ознаки генеральної сукупності від їх середнього значення \bar{x}_r :

$$D_r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_r)^2}{N}. \quad (7.4)$$

Генеральним середнім квадратичним відхиленням (стандартом) називають корінь квадратний із генеральної дисперсії

$$\sigma_r = \sqrt{D_r}.$$

Вибірковою дисперсією D_b називають середнє арифметичне квадратів відхилень ознаки вибірки від їх середнього значення \bar{x}_b :

$$D_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_b)^2.$$

Якщо ж частоти варіант відмінні від одиниці, то

$$D_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_b) n_i, \quad (7.5)$$

де k – кількість різних варіант, n_i – частота варіантів x_i .

Відповідно **вибірковим середнім квадратичним відхиленням (стандартом)** називають корінь квадратний із вибіркової дисперсії

$$\sigma_b = \sqrt{D_b}.$$

Якщо за оцінку генеральної дисперсії прийняти вибіркову дисперсію, то ця оцінка буде призводити до систематичних помилок: вона даватиме зани-

жене значення. Іншими словами, вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної. Її математичне сподівання

$$M[D_b] = \frac{n-1}{n} D_\Gamma.$$

Домноживши вибіркову дисперсію на дріб $n/(n - 1)$, можна отримати величину, математичне сподівання якої дорівнює генеральній дисперсії. Її називають **відправленою дисперсією s^2**

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_b)^2}{n-1}. \quad (7.6)$$

Безумовно, відправлена дисперсія є незміщеною оцінкою. Можна показати, що s^2 є також і спроможною. Тому за оцінку генеральної дисперсії приймають відправлену дисперсію. Відзначимо, що оцінки s^2 та D_b відрізняються на множник $n/(n - 1)$, значення якого прямають до 1 при $n \rightarrow \infty$. На практиці їх не розрізняють при $n > 30$.

Для оцінки середнього квадратичного відхилення користуються **“відправленим” середнім квадратичним s** :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_b)^2}. \quad (7.7)$$

Зауважимо, що s не є незміщеною оцінкою, тому ми пишемо: “відправлене” середнє квадратичне відхилення. Варто також відзначити, що при досить великих об’ємах вибірки вибіркова дисперсія та відправлена (a , отже, і “відправлене” середнє квадратичне) відрізняються мало. “Відправленим” середнім квадратичним на практиці користуються у випадках, коли $n < 30$.

7.5. ТОЧНІСТЬ ТА НАДІЙНІСТЬ ОЦІНКИ. ДОВІРЧИЙ ІНТЕРВАЛ

Оцінку, яка визначається одним числом, називають **точковою**. Всі оцінки, якими ми користувалися раніше (вибіркова середня, дисперсія, стандарт), – точкові. При вибірці малого об’єму точкова оцінка може значно відрізнятися від оцінюваного параметра, що призводить до грубих помилок. Цим і обумовлена необхідність використання інтервальних оцінок. **Інтервальними** називають оцінки, які визначаються двома числами, – кінцями інтервалу. Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність та надійність оцінок.

Припустимо, що знайдена за даними вибірки статистична характеристика Θ^* служить оцінкою невідомого параметра Θ . Ясно, що чим менша абсолютна

величина різниці $|\Theta - \Theta^*|$, тим точніше Θ^* визначає параметр Θ . Іншими словами, якщо

$$|\Theta - \Theta^*| < \delta,$$

то чим менше δ , тим оцінка точніша. Отже, додатне число δ ($\delta > 0$) характеризує **точність оцінки**.

Однак, категорично стверджувати, що Θ^* задовльняє нерівності $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ не можна. **Надійністю (довірчою ймовірністю)** оцінки Θ за Θ^* називають ймовірність γ , з якою виконується нерівність $|\Theta - \Theta^*| < \delta$. Як правило, надійність оцінки задана наперед, причому γ покладають рівним одному із близьких до одиниці чисел: 0,95; 0,99; 0,999. Замість γ часто використовують запис $1 - \alpha$, де α – число дуже близьке до нуля, його називають **рівнем значущості**.

Довірчим називають **інтервал** $(\Theta^* - \delta; \Theta^* + \delta)$, який покриває невідомий параметр із заданою надійністю γ .

Числа $\Theta^* - \delta$ та $\Theta^* + \delta$ називають довірчими межами, δ – півшириною довірчого інтервалу. Довірча ймовірність γ визначається з конкретних умов. Звернемось до прикладу. Розглянемо дві вибірки однакового об’єму ($n \geq 100$): одужання при певному захворюванні в п’ятиденний термін та відповідність стандартам продукції фармацевтичної фабрики. Довірча ймовірність $\gamma = 0,99$ стосовно першої вибірки означає, що із 100 пацієнтів лише один не одужує в п’ятиденний термін. Це непоганий показник. А для фармацевтичної фабрики – із 100 препаратів один бракований – зовсім погано, як γ в такому випадку потрібно взяти більше число, наприклад, $\gamma = 0,999$.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому σ . Заздалегідь значення середнього квадратичного відхилення буває відомим дуже рідко. Це можливо, наприклад, у випадку, коли вимірювання виконується одним і тим самим приладом в одних і тих самих умовах.

Побудуємо довірчий інтервал, який покриває невідоме математичне сподівання з заданою ймовірністю, тобто будемо вимагати, щоб виконувалась рівність

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \gamma.$$

Замінимо X на вибіркову середню \bar{x} , яку можна розглядати як нормальну розподілену випадкову величину з параметрами (цей факт ми приймемо без доведення):

$$M(\bar{x}) = a, \quad \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (7.8)$$

Отримаємо

$$P(|\bar{x} - a| < \delta) = 2\Phi(t),$$

де $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Виразивши з останньої рівності δ :

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \quad (7.9)$$

і врахувавши, що ймовірність P задана і рівна γ , отримаємо робочу формулу:

$$P\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma. \quad (7.10)$$

Зміст отриманого співвідношення: з надійністю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал $\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покриває невідомий параметр a ; точність оцінки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Щоб знайти точність оцінки δ за формулою (7.10), потрібно:

- задати довірчу ймовірність γ (або рівень значущості α);
- знайти функцію Лапласа $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$;
- за табл. 2 додатку знайти t (в таблиці x);
- обчислити величину $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, яка є півшириною довірчого інтервалу, а отже і точністю оцінки.

Аналіз формул для точності оцінки свідчить:

- при збільшенні об'єму вибірки n число δ зменшується, а значить, точність оцінки збільшується;
- збільшення надійності оцінки $\gamma = 2\Phi(t)$ веде до збільшення δ , тобто призводить до зменшення її точності.

Приклад 1. В давнину, як еталон маси, використовували насіння ріжкового дерева. Величину, рівну масі однієї насінини, називали карatom. Припустимо, що маса насінини ріжкового дерева має нормальній закон розподілу з $\sigma = 4,0$ мг. Знайти за даними вибірки довірчий інтервал для математичного сподівання a з заданою надійністю $\gamma = 0,99$, якщо об'єм вибірки $n = 20$, вибіркова середня $\bar{x} = 200$ мг.

Для $\Phi(t) = \gamma/2 = 0,99/2 = 0,495$ за табл. 2 додатку знаходимо $t = 2,58$. Отже,

$$\delta = 2,58 \frac{4,0}{\sqrt{20}} \approx 2,3.$$

Кінці довірчого інтервалу: $200 - 2,3$ та $200 + 2,3$. Отже, довірчий інтервал $[197,7; 202,3]$ накриває a з надійністю 0,99.

2. Часто досліднику доводиться розв'язувати обернену задачу: встановлення об'єму вибірки n , потрібного для забезпечення необхідної точності.

Якщо кількість вимірювань потрібно провести згідно з умовою попереднього прикладу, щоб з надійністю $\gamma = 0,95$ півширина довірчого інтервалу для МС не перевищувала 1 мг?

З табл. 2 додатку знаходимо $t = 1,96$. Тоді згідно з формулою (7.9) маємо

$$n \left(\frac{t\sigma}{\delta} \right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 4}{1} \right)^2 = 61,4.$$

Отже, для досягнення заданої точності потрібно зважити не менше 62 насінин.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормальногорозподілу при невідомому σ . В такому випадку за даними вибірки будують випадкову величину T (її можливі значення позначатимемо t), яка має розподіл Стьюдента:

$$T = \frac{\bar{X} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

де \bar{X} – вибіркова середня, s – “віправлене” середнє квадратичне відхилення, n – об'єм вибірки.

Знайдемо умови, за яких $P(|T| < t_\gamma) = \gamma$.

Враховуючи парність функції $f(t, n)$, маємо

$$P\left(\frac{|\bar{x} - a| \sqrt{n}}{s} < t_\gamma\right) = 2 \int_0^{t_\gamma} f(t, n) dt = \gamma.$$

Звідси

$$P\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Це дозволяє визначити довірчий інтервал $(\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}})$, який з надійністю γ покриває невідомий параметр a . Точність оцінки

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}. \quad (7.11)$$

Величини \bar{x} і s знаходять за вибіркою, а t_γ , при заданих n і γ , за таблицею розподілу Стьюдента (табл. 3 додатку).

Для наочності міркувань сформулюємо задачу, аналогічну до попередніх.

Приклад. Маса насінини ріжкового дерева має нормальній закон розподілу. Знайти за даними вибірки довірчий інтервал для математичного сподівання a з надійністю $\gamma = 0,99$, якщо зважувались $n = 20$ насінин, вибіркова середня $\bar{x} = 200$ мг, “віправлене” середнє $s = 4,0$ мг.

Для надійності $\gamma = 0,99$ та $n = 20$ знаходимо за табл. 3 додатку $t_\gamma = 2,861$. Отже,

$$\delta = 2,861 \frac{4,0}{\sqrt{20}} \approx 2,6,$$

а довірчий інтервал $(197,4; 202,6)$ накриває з надійністю 0,99 математичне сподівання (порівнайте з результатами попереднього прикладу).

Та обставина, що розподіл Стьюдента дає дещо ширший довірчий інтервал, ніж нормальнй розподіл при малих n , пояснюється тим, що мала вибірка містить

Добре засвосна мудрість ніколи не забу-
деться.

Піфагор

мало інформації про кількісну ознакою, яка цікавить, а не є недоліком даного методу. При великому об'ємі вибірки розподіл Стьюдента на-

ближається до нормального. Однак, при $n < 30$ таке наближення приведе до невправданого звуження довірчого інтервалу. Наприклад, при $n = 5$ та $\gamma = 0,99$ за таблицею Лапласа $t = 2,68$, а Стьюдента $t_\gamma = 4,60$. У скільки разів відрізняються ці значення, у стільки ж відрізняється і ширина довірчого інтервалу.

Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу. Обчисливши за вибіркою “виправлене” середнє квадратичне s , знайдемо умови, за яких виконується рівність $P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$. Щоб можна було користуватися готовими таблицями, перетворимо подвійну нерівність

$$s - \delta < \sigma < s + \delta$$

у рівносильну

$$s(1 - \delta/s) < \sigma < s(1 + \delta/s). \quad (7.12)$$

Позначимо $q = \delta/s$. Для знаходження $q = q(\gamma, n)$ користуються табл. 4 додатку. Таким чином, довірчий інтервал $[s - sq; s + sq]$ покриває невідомий параметр σ з заданою надійністю γ ; точність оцінки: $\delta = qs$.

Приклад 1. Рівень pH крові має нормальний закон розподілу. Знайти за даними вибірки довірчий інтервал для σ з надійністю $\gamma = 0,95$, якщо $n = 16$, “виправлене” середнє $s = 0,10$ мг.

За табл. 4 додатку знаходимо $q(\gamma, n) = q(0,95; 16) = 0,44$. Точність оцінки: $\delta = qs = 0,1 \cdot 0,44 = 0,044$. Отже, довірчий інтервал $[0,056; 0,144]$ покриває середнє квадратичне з надійністю 0,95.

2. З метою визначення рівня тиску в капілярах оглянули 25 пацієнтів одного віку. Середнє значення тиску виявилося рівним 22 мм рт. ст., а “виправлене” середнє квадратичне – 3 мм рт. ст. Знайти довірчі інтервали для: а) МС; б) середнього квадратичного відхилення з надійністю $\gamma = 0,95$.

а) Користуючись розподілом Стьюдента для надійності $\gamma = 0,95$ та $n = 25$ за табл. 3 додатку знаходимо $t_\gamma = 2,064$. Отже, $\delta = 2,064 \cdot \frac{3}{\sqrt{25}} \approx 1,238$.

Кінці довірчого інтервалу, в мм рт. ст.:

$$\begin{aligned} 22 - 1,238 &= 20,76; \\ 22 + 1,238 &= 23,24, \end{aligned}$$

а це означає, що інтервал $(20,76; 23,24)$ покриває МС з надійністю $\gamma = 0,95$.

б) За табл. 4 додатку при $n = 25$ та $\gamma = 0,95$ знаходимо $q = 0,32$. Далі $sq = 3 \cdot 0,32 = 0,96$.

Кінці довірчого інтервалу, в мм рт. ст.

$$\begin{aligned} 3 - 0,96 &= 2,04; \\ 3 + 0,96 &= 3,96. \end{aligned}$$

Таким чином, $2,04 < \sigma < 3,96$.

З результатів видно, що a визначено досить точно (відхилення становить $\frac{1,238}{22} \approx 0,056$),

а $\sigma - a$ – ні ($\frac{\delta}{s} = q = 0,32$). Щоб звузити довірчі інтервали при незмінній надійності, потрібно збільшити об'єм вибірки.

Оцінка істинного значення вимірюваної величини. Припустимо, що в однакових умовах (такі вимірювання називають рівноточними) виконано n вимірювань деякої фізичної величини, істинне значення a якої невідоме. Будемо розглядати результати окремих незалежних вимірювань як випадкові величини X_1, X_2, \dots, X_n . Ці величини мають одне і те ж математичне сподівання (істинне значення вимірюваної величини), однакові дисперсії (вимірювання рівноточні) і нормальнй закон розподілу. Таким чином, всі припущення, які були зроблені щодо довірчих інтервалів в даному параграфі, виконуються і ми можемо використовувати отримані в них результати. Оскільки σ , як правило, невідоме, то для знаходження довірчих інтервалів істинного значення варто користуватись виразом (7.11).

Приклад. За результатами 9 незалежних і рівноточних вимірювань знайдені середнє арифметичне $\bar{x} = 42,319$ та “виправлене” середнє квадратичне відхилення $s = 5,0$. Потрібно оцінити істинне значення вимірюваної величини з надійністю $\gamma = 0,99$.

Істинне значення вимірюваної величини дорівнює її математичному сподіванню. Тому, користуючись таблицею розподілу Стьюдента (табл. 3 додатку) при заданих n і γ , знаходимо $t_\gamma = 3,36$.

Знайдемо точність оцінки

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = \frac{3,36 \cdot 5}{\sqrt{9}} = 5,60.$$

Кінці довірчого інтервалу:

$$42,319 - 5,60 = 36,719 \text{ та } 42,319 + 5,60 = 47,919.$$

Отже, з надійністю $\gamma = 0,99$ істинне значення вимірюваної величини знаходиться в інтервалі $[36,719; 47,919]$.

Оцінка точності вимірювань. В теорії похибок прийнято точність вимірювань характеризувати за допомогою середнього квадратичного відхилення випадкових помилок вимірювань. Для оцінки використовують “виправлене” середнє квадратичне відхилення s . Якщо вимірювання незалежні та рівноточні, то можна скористатись формулою (7.12).

Приклад. За 16 рівноточними вимірюваннями знайдено “виправлене” середнє квадратичне відхилення $s = 0,4$. Визначити точність вимірювань з надійністю $\gamma = 0,99$.

За табл. 4 додатку знайдемо $q(\gamma, n) = q(0,99; 16) = 0,70$, відповідно $\delta = qs = 0,70 \cdot 0,4 \approx 0,28$.

Шуканий інтервал $0,12 < \sigma < 0,68$.

Все, що тобі здається випадковим збі-
гом обставин, таким не є зовсім.

С. Лем

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Побудувати полігон за даними вибірки.

Варіанта	4	6	12
Частота	4	10	6

Розв'язання. Обчисливши об'єм вибірки $n = 4 + 10 + 6 = 20$, знайдемо відносні частоти $p_i^* = \frac{n_i}{n}$:

$$p_1 = \frac{4}{20} = 0,20; \quad p_2 = \frac{10}{20} = 0,50; \quad p_3 = \frac{6}{20} = 0,30.$$

Полігон даного розподілу подано на рис. 7.3.

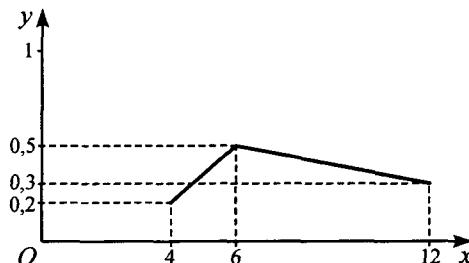


Рис. 7.3

2. Побудувати гістограму неперервного розподілу, який задано таблицею.

Частковий інтервал h	Сума частот варіант часткового інтервалу n_i	$\frac{n_i}{h}$
5–10	4	0,8
10–15	6	1,2
15–20	16	3,2
20–25	36	7,2
25–30	24	4,8
30–35	10	2,0
35–40	4	0,8

Гістограма заданого розподілу подана на рис. 7.2.

3. Вибіркова сукупність задана таблицею розподілу.

x_i	2	4	5	6
n_i	8	9	10	3

Знайти вибіркову середню, виправлену дисперсію та оцінити середнє квадратичне відхилення вибіркової середньої.

Розв'язання. Згідно з формулами (7.3) та (7.5) маємо:

$$\bar{x}_B = \frac{2 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 3}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4,$$

$$D_B = \frac{(2-4)^2 \cdot 8 + (4-4)^2 \cdot 9 + (5-4)^2 \cdot 10 + (6-4)^2 \cdot 3}{30} = 1,8.$$

Виправлена дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{30}{29} \cdot 1,8 \approx 1,83.$$

Виправлене середнє квадратичне

$$s = \sqrt{1,83} \approx 1,35.$$

Оцінкою середнього квадратичного відхилення вибіркової середньої служить згідно з (7.8) величина $\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}}$. В даному випадку $\bar{s} = \frac{1,35}{\sqrt{4}} \approx 0,68$.

4. Вміст сульфату хініну в таблетках визначався спектрофотометричним методом. В результаті шести вимірювань одержали такі результати: 99,9; 99,8; 99,6; 99,1; 99,2; 99,2 %. Визначити середнє значення при довірчій точності $p = 0,95$.

Розв'язання. Знайдемо вибіркову середню

$$\bar{x} = \frac{99,9 + 99,8 + 99,6 + 99,1 + 99,2 + 99,2}{6} = 99,5 \text{ %}.$$

Згідно з (7.9) $\delta = \frac{ts}{\sqrt{n}}$.

Обчислимо

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(99,9 - 99,5)^2 + \dots + (99,2 - 99,5)^2}{6 \cdot 5}} \approx 0,14 \text{ %}.$$

За табл. 3 додатку $t(0,95; 6) = 2,57$. Отже, $\delta = 2,57 \cdot 0,14 \approx 0,3 \text{ %}$.

Істинний вміст сульфату хініну $(99,5 \pm 0,3) \text{ %}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Побудувати полігон такого розподілу:

x_i	1	3	5	7	9
n_i	8	12	30	28	12

2. Побудувати гістограму розподілу рівня pH у крові дітей відповідно до таблиці.

Рівень pH	Число дітей
7,30	1
7,31	1
7,32	3
7,33	4
7,34	8
7,35	12
7,36	6
7,38	2

3. Проводилося обстеження групи спортсменів із 25 чоловік. При вимірюванні обхвату грудної клітки встановлено, що у двох вона дорівнює 90 см, у чотирьох – 96, у трьох – 97, у шістьох – 98, у сімох – 100, у двох – 102, у одного – 103. Знайти вибіркову середню та дати оцінку середнього квадратичного відхилення вибіркової середньої.

4. За вибіркою були знайдені такі дані про масу новонароджених морських свинок (в грамах): 30, 30, 25, 32, 30, 25, 33, 32, 29, 28, 27, 36, 31, 34, 30, 29, 23, 36, 30. Побудувати варіаційний ряд та гістограму. Знайти вибіркову середню, вибіркову та виправлену дисперсію і дати оцінку середнього квадратичного відхилення вибіркової середньої.

5. Знайти вибіркову середню та дисперсію за даними вимірювання довжини хоботка (в мм) у 6 бджіл: 6,54; 6,71; 6,70; 6,69; 6,70; 6,62.

6. В наступних вправах а), б), в) дані: середнє квадратичне відхилення σ , вибіркова середня \bar{x}_b та об'єм вибірки n . Знайти довірчі інтервали для генеральної середньої з заданою надійністю γ :

а) $\sigma = 3$; $\bar{x}_b = 4,0$; $n = 36$; $\gamma = 0,95$.

б) $\sigma = 2$; $\bar{x}_b = 4,3$; $n = 6$; $\gamma = 0,99$.

в) $\sigma = 1$; $\bar{x}_b = 4,5$; $n = 25$; $\gamma = 0,999$.

7. За вибіркою знайдено дисперсію деякої випадкової величини $D_b = 8$. Знайти виправлену дисперсію, якщо об'єм вибірки: а) $n = 51$; б) $n = 4$.

8. Знайти, користуючись розподілом Стьюдента, довірчі інтервали для оцінки генеральної середньої a з надійністю $\gamma = 0,99$, якщо виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 0,6$, вибіркова середня $\bar{x}_b = 20,2$, об'єм вибірки $n = 16$.

9. За вибіркою об'єму $n = 41$ знайдена вибіркова дисперсія $D = 3$. Знайти виправлену дисперсію.

10. Знайти, користуючись розподілом Стьюдента, довірчі інтервали для оцінки генеральної середньої a з надійністю $\gamma = 0,99$, якщо виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 2,4$; вибіркова середня $\bar{x}_b = 14,2$; $n = 9$.

11. За 9 рівноточними вимірюваннями деякої фізичної величини знайшли середнє арифметичне $\bar{x}_b = 42,3$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 5$. Оцінити істинне значення a вимірюваної величини з надійністю $\gamma = 0,95$.

12. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0,99$ невідомого математичного сподівання нормально розподіленого параметру генеральної сукупності, якщо $\sigma = 4$, $\bar{x}_b = 10,2$, $n = 16$.

13. У результаті п'яти зважувань отримані такі дані (в мг): 92, 94, 105, 106, 103. Знайти вибіркову середню, дисперсію і виправлену дисперсію за результатами вимірювань.

14. Знайти, користуючись розподілом Стьюдента, довірчі інтервали для оцінки генеральної середньої a з надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 1,6$; вибіркова середня $\bar{x}_b = 16,8$; $n = 12$;

15. Зроблено 12 вимірювань одним приладом (без систематичної помилки), при цьому середнє квадратичне відхилення виявилось рівним 0,8. Знайти точність приладу з надійністю $\gamma = 0,95$.

16. Знайти, користуючись розподілом Стьюдента, довірчі інтервали для оцінки генеральної середньої a з надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 0,6$; вибіркова середня $\bar{x}_b = 15$; об'єм вибірки $n = 14$.

17. Визначити довірчий інтервал для середньої активності тетрацикліну гідрохлориду з довірчою ймовірністю $\gamma = 0,95$, якщо на основі серії із шести дослідів отримали $\bar{s}^2 = 13,5$, $\bar{x} = 950$, де $\bar{s}^2 = \frac{s}{\sqrt{n}}$.

18. В результаті семи вимірювань діаметра капіляра легеневих альвеол отримали такі значення, мкм: 2,88; 2,83; 2,80; 2,82; 2,84; 2,85; 2,86. Оцінити істинне значення діаметра капіляра, абсолютну й відносну похибку при довірчій імовірності $\gamma = 0,95$ та $\gamma = 0,99$.

19. При десяти одинакових пробах були отримані такі значення вмісту капію, %: 1; 1,05; 1,1; 0,99; 0,97; 0,98; 1,08; 1,07; 1,01; 1,03. Знайти істинний вміст капію, відносну та абсолютну похибки при $\gamma = 0,95$.

8.1. СТАТИСТИЧНА ГІПОТЕЗА ТА СТАТИСТИЧНИЙ КРИТЕРІЙ. КРИТИЧНА ОБЛАСТЬ

Гіпотезу щодо виду невідомого розподілу, його параметрів та інших статистичних величин називають **статистичною гіпотезою**. Наприклад, статистичними є гіпотези:

- генеральна сукупність має рівномірний розподіл;
- дисперсія генеральної сукупності дорівнює певному числу.

Гіпотеза “я на іспиті отримаю п’ятірку” не є статистичною, оскільки в ній не йдеється ні про закон розподілу, ні про його параметри.

Висунуту гіпотезу називають **основною (нульовою)**. Гіпотезу, яка суперечить основній, називають **альтернативною (конкуруючою)**. Для перевірки гіпотез використовують **статистичні критерії** K – вибрані певним чином випадкові величини з відомим законом розподілу. Залежно від закону розподілу статистичні критерії позначимо різними літерами: F – якщо він має розподіл Фішера–Сnedекора, T – Стьюдента, χ^2 – розподіл “ x_i – квадрат”, Z – при нормальному законі розподілу.

Сукупність значень критерію K , при яких основна гіпотеза не приймається, називають **критичною областю**. Точки K_1 та K_2 , що відділяють критичну область від області прийняття гіпотези, називають **критичними**. Залежно від виду альтернативної гіпотези критична область може бути двосторонньою (рис. 8.1, а), правосторонньою (рис. 8.1, б) або лівосторонньою (рис. 8.1, в).

Гіпотеза може бути перевірена, але ніколи не може бути доведена.

Л. Закс

Обґрутування вибору критичної області вимагає складних теоретичних викладок, тому обмежимося лише формулюванням правил для її знаходження. Спочатку задамося рівнем значущості α (як правило вибирають значення $\alpha = 0,01; 0,05; 0,001$ тощо). Виходячи з умови: ймовірність того, що критерій K набуде значень з критичною області, дорівнює α , знаходять критичні точки. Цю умову можна записати:

- а) для правосторонньої області $P(K > K_{kp}) = \alpha$;

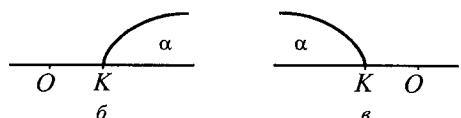
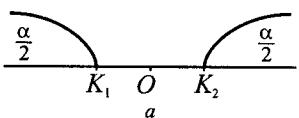


Рис. 8.1

- б) для лівосторонньої області $P(K < K_{kp}) = \alpha$;

- в) для двосторонньої симетричної області $P(|K| > K_{kp}) = \frac{\alpha}{2}$.

Для кожного з критеріїв існують таблиці, за якими і знаходять значення критичних точок.

8.2. ПОРІВНЯННЯ ДИСПЕРСІЙ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИХ ВЕЛИЧИН

На практиці ця проблема виникає при порівнянні точності приладів, інструментів, методів вимірювання. Очевидно, перевагу потрібно надати тому з методів, який забезпечує мінімальну дисперсію. Припустимо, що генеральні сукупності X та Y розподілені нормальні. За незалежними вибірками, об'ємом n та m , обчислені виправлені вибіркові дисперсії s_x^2 та s_y^2 . Потрібно перевірити гіпотезу про те, що генеральні дисперсії цих сукупностей рівні між собою $D(X) = D(Y)$. Враховуючи, що виправлені дисперсії є незміщеними оцінками, основну гіпотезу можна сформулювати і таким чином: математичні сподівання вибіркових дисперсій рівні між собою

$$M[s_x^2] = M[s_y^2].$$

Як правило, вибіркові дисперсії різні, тому важливим є питання – відмінності між ними є суттєвими (значущими), чи ні? Критерієм перевірки цієї гіпотези приймемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої:

$$F = \frac{s_6^2}{s_m^2}. \quad (8.1)$$

Величина F має розподіл Фішера–Сnedекора, який, як відомо, визначається лише числом ступенів вільності $k_1 = n - 1$ та $k_2 = m - 1$. Задамося рівнем значущості і виберемо альтернативну гіпотезу.

Випадок 1. Альтернативною є гіпотеза $M[s_x^2] \neq M[s_y^2]$. Критична об-

ласть в такому випадку двостороння. За табл. 7 додатку при рівні значущості $\frac{\alpha}{2}$ (область двостороння) та при ступенях вільності k_1 і k_2 знаходимо критичну

точку $F_{kp}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$. Якщо розраховане за дослідними даними $F = \frac{s_6^2}{s_m^2}$ буде більшим за критичне значення ($F > F_{kp}$), то основна гіпотеза відхиляється, якщо ж $F < F_{kp}$, то немає підстав відхиляти основну гіпотезу.

Приклад. Потрібно встановити, чи є зміна частоти серцевих скорочень побічним ефектом, який виник після приймання певного лікарського препарату. За двома незалежними вибірками з генеральних сукупностей X – особи, що приймали препарат, та Y – контрольна група, знайдені виправлені вибіркові дисперсії: $s_x^2 = 15$ та $s_y^2 = 5$. Об'єми вибірок $n = 10$ та $m = 15$ відповідно. Перевірити гіпотезу про рівність генеральних дисперсій при рівні значущості $\alpha = 0,1$. Альтернативна гіпотеза $M[s_x^2] \neq M[s_y^2]$.

Знайдемо відношення більшої вибіркової дисперсії до меншої

$$F = \frac{15}{5} = 3.$$

Критична область двостороння. Тому для значень $\frac{\alpha}{2} = 0,05$, $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 15 - 1 = 14$ знаходимо за табл. 7 додатку $F_{kp}(0,05, 9, 14) = 2,65$. Оскільки отримане F більше за $F_{kp}(3 > 2,65)$, то робимо висновок: виправлені дисперсії відрізняються суттєво. Основна гіпотеза $D(X) = D(Y)$ не приймається.

Випадок 2. У деяких випадках висувають конкуруючу гіпотезу: значення однієї з генеральних дисперсій перевищують значення іншої. Наприклад, якщо оцінка дисперсії s_x^2 виявилась більшою, ніж s_y^2 , то альтернативною розглядають гіпотезу $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$ або $M[s_x^2] > M[s_y^2]$. Критична область в цьому випадку правостороння. За таблицею критичних точок розподілу Фішера–Сnedекора при заданому рівні значущості α та за ступенями вільності k_1 і k_2 (табл. 7 додатку) знаходимо критичну точку $F_{kp}(\alpha, k_1, k_2)$. Якщо розраховане на основі дослідних даних значення F виявиться меншим за критичне, основну гіпотезу (гіпотезу про рівність генеральних дисперсій) приймають, якщо ж $F > F_{kp}$ – відхиляють.

8.3. ПОРІВНЯННЯ ВИПРАВЛЕНОЇ ВИБІРКОВОЇ ДИСПЕРСІЇ З ГІПОТЕТИЧНОЮ ГЕНЕРАЛЬНОЮ ДИСПЕРСІЄЮ НОРМАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ

Припустимо, що теоретично або на основі попередніх дослідів вдалося встановити, що генеральна дисперсія може дорівнювати певному значенню σ_0^2 . Потрібно дізнатися, чи суттєвими є розбіжності між виправленою дисперсією s^2 , отриманою за вибіркою, та гіпотетичною генеральною σ_0^2 .

Коли на практиці виникає така проблема? Звернемося до прикладу. Припустимо, що відоме допустиме розсіювання σ_0^2 значень концентрації певного компонента (або іншого параметра) в лікарському препараті і потрібно оцінити, чи відповідає технологічний процес цим вимогам. За вибіркою знахо-

дять s^2 і встановлюють значущість відмінностей між σ_0^2 та s^2 . Тобто, така гіпотеза перевіряється, коли потрібно впевнитись у точності приладів, інструментів, технологічних процесів.

Критерієм перевірки слугує величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}. \quad (8.2)$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при вибраному рівні значущості α і кількості ступенів вільності $k = n - 1$ знаходять критичні точки.

Критична область будеться залежно від виду альтернативної гіпотези.

Спочатку розглянемо випадок, який зустрічається на практиці найчастіше.

Випадок 1. Основна гіпотеза $M(s^2) = \sigma_0^2$, альтернативна $M(s^2) > \sigma_0^2$.

Критична область правостороння. Критичну точку $\chi_{kp}^2(\alpha, k)$ знаходять за табл. 5 додатку.

Якщо $\chi^2 < \chi_{kp}^2(\alpha, k)$, то висунута гіпотеза приймається, якщо $\chi^2 > \chi_{kp}^2(\alpha, k)$ – відхиляється.

Приклад. Таблетка біцептолу повинна мати масу (480 ± 1) мг. З експериментальної партії зроблена вибірка об'ємом $n = 10$ і знайдена виправлена дисперсія $s^2 = 2$. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити гіпотезу про те, що s^2 не перевищує $\sigma_0^2 = 1$.

Число ступенів вільності $k = 10 - 1 = 9$. За табл. 5 додатку знаходимо $\chi_{kp}^2(0,01; 9) = 21,7$. Розраховуємо значення критерію за даними спостережень

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \cdot 2}{1} = 18.$$

Оскільки $\chi^2 < \chi_{kp}^2$, то немає підстав відхилити гіпотезу $M(s^2) = \sigma_0^2$. Висунута гіпотеза приймається.

Випадок 2. Основна гіпотеза $M(s^2) = \sigma_0^2$, альтернативна $M(s^2) \neq \sigma_0^2$.

Критична область двостороння. Ліву критичну точку $\chi_{l,kp}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k\right)$ і праву $\chi_{pr,kp}^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}, k\right)$ знаходять за табл. 5 додатку.

Якщо $\chi_{l,kp}^2 < \chi^2 < \chi_{pr,kp}^2$, то основна гіпотеза приймається. Якщо $\chi^2 < \chi_{l,kp}^2$ або $\chi^2 > \chi_{pr,kp}^2$ – відхиляється.

Випадок 3. Основна гіпотеза $M(s^2) = \sigma_0^2$, альтернативна $M(s^2) < \sigma_0^2$. Критична область лівостороння. За табл. 5 додатку знаходять критичну точку $\chi_{kp}^2(1 - \alpha, k)$.

Якщо $\chi^2 > \chi_{kp}^2$, то основна гіпотеза приймається, якщо $\chi^2 < \chi_{kp}^2$ – відхиляється.

8.4. ПОРІВНЯННЯ ВИБІРКОВИХ СЕРЕДНІХ ДВОХ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНІХ СУКУПНОСТЕЙ

Припустимо, що за вибірками об'ємом n та m відповідно, знайдені вибіркові середні \bar{x} та \bar{y} , які, як правило, є різними. Потрібно встановити, чи суттєвими є розбіжності між значеннями \bar{x} та \bar{y} , тобто перевірити гіпотезу

Людині може не таланити багато разів, але невдахує стає лише тоді, коли починає звинувачувати інших.

Т. Енгстрем

про рівність генеральних середніх. Враховуючи, що вибіркові середні є незміщеними оцінками генеральних середніх, основна

(нульова) гіпотеза може бути сформульована і так: математичні сподівання вибіркових середніх рівні між собою $M(\bar{x}) = M(\bar{y})$.

Наприклад, дослідник хоче встановити, чи впливає радіаційне опромінення на певну функцію живих організмів. З цією метою досліджується деякий фізіологічний, фізичний або біохімічний параметр (концентрація гемоглобіну, густина кісткової тканини, значення біопотенціалів тощо). Обстежують n осіб з радіаційно забрудненою та m осіб з “чистої” зони. Обраховані дляожної з груп середні значення \bar{x} та \bar{y} даного параметра будуть, взагалі кажучи, різними ($\bar{x} \neq \bar{y}$). Важливо знати: ці відмінності є суттєвими, чи їх можна пояснити, наприклад, випадковістю відбору об'єктів вибірки.

Аналогічні ситуації виникають при тестуванні лікарських препаратів, при вимірюванні різними методами (чи приладами) однієї тієї ж фізичної величини.

Припустимо, що дисперсії генеральних сукупностей X та Y відомі. Критерієм перевірки служить

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}. \quad (8.3)$$

Критерій Z має нормальний закон розподілу, оскільки він є лінійною комбінацією нормальні розподілених величин \bar{X} та \bar{Y} . Крім того, Z – нормована величина: $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$.

Щоб перевірити гіпотезу про рівність генеральних середніх, за даними спостережень обчислюють Z . Критична область будеться залежно від виду альтернативної гіпотези.

Випадок 1. Альтернативною є гіпотеза $M(X) \neq M(Y)$. Критична область двостороння. Оскільки Z симетрична відносно 0, то ліва і права границі критичної області відрізняються лише знаком ($z_{kp} = -z_{np}$). Права критична точка $z_{kp} = z_{np} = z_l$ знаходиться за таблицею функції Лапласа з рівності

$$\Phi_{z_{kp}} = \frac{1 - \alpha}{2},$$

де α – наперед заданий рівень значущості.

Доведемо це.

Як відомо, функція Лапласа визначає ймовірність попадання нормованої нормальні випадкової величини в інтервал $(0; z)$:

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z),$$

тоді

$$P(0 < Z < \infty) = \frac{1}{2}.$$

Критична точка z_{kp} розбиває інтервал $(0; \infty)$ на дві області $(0; z_{kp})$ та $(z_{kp}; \infty)$. За теоремою додавання ймовірностей

$$P(0 < Z < z_{kp}) + P(z_{kp} < Z < \infty) = \frac{1}{2}$$

або

$$\Phi(z_{kp}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Звідси отримаємо

$$\Phi(z_{kp}) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Якщо виявиться, що $|Z| < z_{kp}$, то основна гіпотеза приймається, якщо ж $|Z| > z_{kp}$, то ні.

Приклад. За двома незалежними вибірками об'ємом $n = 60$ та $m = 50$ знайдені середні значення концентрації гемоглобіну $\bar{x} = 130$ г/л та $\bar{y} = 135$ г/л. Генеральні дисперсії відомі $D(X) = 12$ та $D(Y) = 8$ г/л². При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевіримо основну гіпотезу про

рівність генеральних середніх: $M(X) = M(Y)$. За альтернативну приймемо гіпотезу: $M(X) \neq M(Y)$. Спочатку обчислимо значення критерію Z

$$Z = \frac{130 - 135}{\sqrt{\frac{12}{60} + \frac{8}{50}}} \approx -8,3.$$

Знайдемо критичні точки $|z_{kp}| = |z_\alpha| = z_{kp}$:

$$\Phi(z_{kp}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,01}{2} = 0,495.$$

За табл. 2 додатку знайдемо $z_{kp} = 2,58$. Оскільки $|Z| > z_{kp}$, то основна гіпотеза не приймається.

Іншими словами, \bar{X} та \bar{Y} відрізняються значуще.

Випадок 2. При заданому рівні значущості та альтернативній гіпотезі $M(X) > M(Y)$ потрібно перевірити основну гіпотезу про рівність математичних сподівань двох нормальним розподілених генеральних сукупностей з відомими дисперсіями.

За таблицею функції Лапласа знаходимо критичну точку з рівності

$$\Phi(z_{kp}) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

За формулою (8.3) розраховуємо Z . Якщо $Z < z_{kp}$, то немає підстав для відхилення основної гіпотези, якщо $Z > z_{kp}$ – основна гіпотеза відхиляється.

Випадок 3. Альтернативна гіпотеза $M(X) < M(Y)$. Тепер критична область лівостороння. За таблицею функції Лапласа знаходимо модуль критичної точки з рівності

$$\Phi(z_{kp}) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

Якщо $Z > -|z_{kp}|$ – основна гіпотеза приймається, при $Z < -|z_{kp}|$ – відхиляється.

В математичній статистиці доводиться, що критерій Z (8.3) може бути використаний і у випадку невідомих дисперсій за умови, що об'єми вибірок великі (n та m більші 30).

8.5. ПОРІВНЯННЯ СЕРЕДНІХ ДВОХ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНІХ СУКУПНОСТЕЙ, ДИСПЕРСІЇ ЯКИХ НЕВІДОМІ

Спочатку, користуючись критерієм Фішера–Сnedекора, потрібно перевірити гіпотезу про рівність генеральних дисперсій. Припустимо, що ця гіпотеза вірна: генеральні дисперсії рівні між собою.

Як критерій перевірки основної гіпотези $M(X) = M(Y)$, приймемо випадкову величину

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}, \quad (8.4)$$

яка має t – розподіл Стьюдента з $k = n+m-2$ ступенями вільності, де n та m – об'єми вибірок. Для того щоб при заданому рівні значущості α перевірити основну гіпотезу: $M(X) = M(Y)$, обчислюємо спочатку значення критерію T . Потім будуємо критичну область.

Випадок 1. Нехай критична область двостороння (альтернативна гіпотеза $M(X) \neq M(Y)$). Оскільки розподіл Стьюдента симетричний відносно нуля, то ліва і права критичні точки відрізняються лише за знаком. За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента при заданому α та обчисленому k знаходимо двосторонню критичну точку $t_{дв. kp}(\alpha, k)$. Якщо $|T| < t_{дв. kp}$ – основна гіпотеза приймається, якщо $|T| > t_{дв. kp}$ – відхиляється.

Випадок 2. Критична область правостороння (альтернативна гіпотеза $M(X) > M(Y)$).

У цьому випадку за табл. 6 додатку знаходить правосторонню критичну точку $t_{одн. kp}(\alpha, k)$.

Якщо $|T| < t_{одн. kp}$ – основна гіпотеза приймається, якщо $|T| > t_{одн. kp}$ – відхиляється.

Випадок 3. Критична область лівостороння. Альтернативною є гіпотеза $M(X) < M(Y)$. За табл. 6 додатку визначають правосторонню критичну точку $t_{одн. kp}(\alpha, k)$. З міркувань симетрії приймають $t_{л. kp} = -t_{одн. kp}(\alpha, k)$.

Якщо розрахована за даними вибірки $T > t_{л. kp}$, то основна гіпотеза приймається. В протилежному випадку – ні.

Приклад. За даними двох пологових будинків X та Y знайшли середнє значення кількості еритроцитів у крові новонароджених $\bar{x} = 6,0 \cdot 10^{12} \text{ л}^{-1}$, $\bar{y} = 5,7 \cdot 10^{12} \text{ л}^{-1}$. Об'єми вибірок $n=5$ та $m=6$, виправлени дисперсії $s_x^2 = 0,25 \cdot 10^{24} \text{ л}^{-2}$, $s_y^2 = 0,12 \cdot 10^{24} \text{ л}^{-2}$. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ та альтернативній гіпотезі $M(X) \neq M(Y)$ перевірити основну гіпотезу про рівність вибіркових середніх $M(X) = M(Y)$.

Спочатку перевіримо гіпотезу про рівність вибіркових середніх. Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої

$$F = \frac{0,25 \cdot 10^{24}}{0,12 \cdot 10^{24}} \approx 2,09.$$

Оскільки s_x^2 значно більше від s_y^2 , як альтернативну можна вибрати гіпотезу $D(X) > D(Y)$.

У цьому випадку критична область правостороння. За таблицею критичних точок розподілу Фішера–Сnedекора при $\alpha = 0,05$, $k_1 = 5 - 4 = 4$, $k_2 = 6 - 1 = 5$ знайдемо $F_{kp}(0,05; 4; 5) = 5,19$.

Оскільки $F < F_{kp}$, гіпотеза про рівність генеральних дисперсій приймається.

Обчислюємо значення критерію Стьюдента

$$t = \frac{(6-5,7) \cdot 10^2}{10^2 \sqrt{4 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,12}} \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 5 \cdot (6+5-2)}{6+5}} \approx 1,2.$$

За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ та числом ступенів вільності $k = 5 + 6 - 2 = 9$ знаходимо (табл. 6 додатку) двосторонню критичну точку (оскільки альтернативна гіпотеза за умовою $M(X) \neq M(Y)$), $t_{дв.kp}(0,05; 9) = 2,26$. Отримане за даними вибірок $t = 1,2$ менше за критичне

Чи вважаєте ви, що можете, чи ні, – ви праві?

Г. Форд

значення, основна гіпотеза приймається. Іншими словами, середні значення кількості еритроцитів за даними двох пологових будинків відрізняються несуттєво.

8.6. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗИ ПРО РІВНІСТЬ ГЕНЕРАЛЬНИХ ДИСПЕРСІЙ ДЕКІЛЬКОХ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНІХ СУКУПНОСТЕЙ

Припустимо зроблено m вибірок однакового об'єму N з деяких нормально розподілених сукупностей. За даними вибірок знайдені оцінки дисперсій для всіх m сукупностей. Для перевірки основної гіпотези про рівність генеральних дисперсій цих сукупностей в такому випадку найчастіше використовують **критерій Кочрена (G)**. Експериментальне значення цього критерію обчислимо, як відношення максимальної із оцінок дисперсій до суми всіх оцінок:

$$G = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_m^2}.$$

Задавшись рівнем значущості α , за табл. 8 додатку знаходимо критичні значення критерію Кочрена $G_{kp}(\alpha, N-1, m)$. Якщо G , отримане із спостережень, менше за критичне ($G < G_{kp}$), то немає підстав відхиляти основну гіпотезу, якщо ж $G > G_{kp}$ – основну гіпотезу відхиляють.

Якщо вибірки мають різні об'єми N_1, N_2, \dots, N_m (всі $N \geq 4$), для перевірки основної гіпотези користуються **критерієм Бартлетта**, експериментальне значення якого знаходить за формулою :

$$B = \frac{V}{W},$$

$$\text{де } V = 2,303 \left(k \lg \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^m k_i \lg s_i^2 \right); k = \sum_{i=1}^m k_i; k_i = N_i - 1; \bar{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m k_i s_i^2}{k}; W = 1 + \frac{\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}}{3(m-1)}.$$

Отримане значення порівнюють з критичним (табл. 8 додатку) $B_{kp}(\alpha, m-1)$. Якщо $B > B_{kp}$, основну гіпотезу відхиляють, якщо ж $B < B_{kp}$, то підстав для відхилення основної гіпотези немає.

8.7. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗИ ПРО НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ. КРИТЕРІЙ ЗГОДИ ПІРСОНА

За даними спостережень висувають статистичну гіпотезу про закон розподілу генеральної сукупності, наприклад вважають, що генеральна сукупність розподілена нормальню. Критерієм згоди називають критерій перевірки правильності висунутої гіпотези щодо невідомого закону розподілу. Існує декілька критеріїв згоди: Пірсона, Колмогорова, Смирнова тощо. Ми познайомимося з критерієм Пірсона, який розглянемо стосовно нормального закону розподілу (аналогічно цей критерій можна застосувати і до інших розподілів, у цьому полягає його цінність). З цією метою порівнюють емпіричні (ті, що спостерігаються в експерименті) і теоретичні (ті, які обчислені на основі припущення про нормальній розподіл) частоти.

Теоретичні, їх ще називають вирівнюючими, частоти знаходять за формuloю

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_b} \varphi(u_i),$$

де n – сума частот, які спостерігалися (об'єм вибірки); $h = x_{i+1} - x_i$ – відстань між двома сусідніми варіантами; $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_b}{\sigma_b}$; $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$. Значення функції $\varphi(u)$ наведені в табл. 1 додатку.

Як правило, значення вирівнюючих і емпіричних частот відрізняються. Наприклад:

емпіричні частоти	7	14	38	74	105	85	31	14
теоретичні частоти	4	15	42	82	98	76	38	13

Чи є випадковим це розходження? Можливо, воно незначуще і пояснюється малим числом спостережень, способом їх групування, або іншими причинами. А можливо, причина в тому, що теоретичні частоти обчислені на основі невірної гіпотези про закон розподілу. Критерій Пірсона дозволяє знайти відповідь на ці запитання. Правда, він не доводить справедливість гіпотези, а лише встановлює на певному рівні значущості її узгоджуваність (чи неузгоджуваність) з даними вибірки. Позначимо через χ^2 суму

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}, \quad (8.5)$$

яка є випадковою величиною, що має розподіл χ^2 – “xi” квадрат.

Для наведених у прикладі значень виконуємо обчислення за формулою (8.5). Отриманий результат позначимо χ_0^2 . Потім обчислимо число ступенів вільності $k = m - z - 1$, де m – кількість різних варіант вибірки, z – число параметрів, якими визначається даний закон розподілу (для нормального $z = 2$, для експоненціального та розподілу Пуассона $z = 1$).

Тепер задамо рівень значущості α . За табл. 5 додатку знаходимо значення $\chi^2(\alpha, k)$. Якщо виявиться, що $\chi_0^2 > \chi^2$, то гіпотеза відхиляється на даному рівні значущості α , якщо ж $\chi_0^2 < \chi^2$, то гіпотеза приймається на даному рівні значущості. Як правило, рівень значущості приймають або 0,05, або 0,01, або 0,001 (рівень значущості – це ймовірність відхилення гіпотези, якщо вона вірна).

Як приклад, при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевіримо гіпотезу про нормальний розподіл для наведених вище частот. Обчислення χ_0^2 зручно виконати за допомогою таблиці.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_i - n'_i$	3	-1	-4	-8	7	9	-7	1
$(n_i - n'_i)^2$	9	1	16	64	49	81	49	1
$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	3	0,07	0,38	0,78	0,49	1,07	1,29	0,08

Знаходимо $\chi_0^2 = 6,42$, просумувавши значення, наведені в останньому рядку таблиці.

Враховуючи, що число різних варіант $m = 8$, знайдемо число ступенів вільності $k = 8 - 3 = 5$. По рівню значущості $\alpha = 0,05$ та числу ступенів вільності $k = 5$ знайдемо за табл. 5 значення $\chi^2(0,05; 5) = 11,07$. Оскільки $\chi_0^2 < \chi^2$, то на даному рівні значущості гіпотеза про нормальній закон розподілу приймається.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Перевіряється вплив магнітного поля низької частоти на новоутворення. В таблиці наведено значення розміру пухлини Герена на четвертий день захворювання для тварин різних груп (по вісім ізожної групи). Використано дані із [9].

X	0,027	0,036	0,1	0,12	0,32	0,45	0,049	0,105
Y	0,075	0,4	0,08	0,105	0,075	0,12	0,06	0,075

Перевірити гіпотезу про рівність вибіркових середніх.

Розв'язання. Розрахуємо вибіркові середні та вибіркові виправлені дисперсії для першої та другої груп відповідно:

$$\bar{X}_B = 0,151; \quad \bar{Y}_B = 0,124; \\ s_1^2 = 0,023; \quad s_2^2 = 0,013.$$

Знайдемо значення критерію Фішера за результатами спостережень

$$F = \frac{s_B^2}{s_A^2} = 1,81.$$

При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевіримо основну гіпотезу про рівність вибіркових дисперсій. Як альтернативну, виберемо $M(s_2^2) > M(s_1^2)$, тобто $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$. Критична область в цьому випадку правостороння. За табл. 7 додатку знаходимо $F_{kp}(0,05; 7; 7) = 3,79$. Ми врахували, що число ступенів вільності однакове $k_1 = k_2 = 8 - 1 = 7$.

Оскільки $F < F_{kp}$, то підстав для відхилення основної гіпотези немає.

Отже, вибіркові дисперсії відрізняються незначуще, як критерій перевірки гіпотези про рівність вибіркових середніх згідно з (8.4), приймемо:

$$t = \frac{0,151 - 0,124}{\sqrt{9 \cdot 0,023 + 9 \cdot 0,124}} \sqrt{\frac{9^2 \cdot 16}{18}} \approx 0,2.$$

Знайдемо критичне значення розподілу Стьюдента при рівні значущості $\alpha = 0,05$ та альтернативній гіпотезі $M(X) \neq M(Y)$. Критична область в такому випадку двостороння. За табл. 6 додатку $t_{kp}(0,05; 7) = 2,36$. Оскільки $t < t_{kp}$, то немає підстав відхилити основну гіпотезу про рівність вибіркових середніх.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Перевірити гіпотезу про нормальній розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні і теоретичні частоти. Рівень значущості 0,05.

a)	Емпіричні частоти	6	12	16	40	13	8	5
	Теоретичні частоти	4	11	15	43	15	6	6

b)	Емпіричні частоти	5	13	12	44	8	12	6
	Теоретичні частоти	2	20	12	35	15	10	6

в)	Емпіричні частоти	5	6	14	32	43	39	30	20	6	5
	Теоретичні частоти	4	7	12	29	48	35	34	18	7	5

г)	Емпіричні частоти	6	8	13	15	20	36	10
	Теоретичні частоти	5	9	14	16	18	22	12

д)	Емпіричні частоти	14	18	32	70	20	36	10
	Теоретичні частоти	10	24	34	80	18	22	12

е)	Емпіричні частоти	5	7	15	14	21	16	9
	Теоретичні частоти	6	6	14	15	8	6	4

2. Показник кольору крові характеризує відносний вміст гемоглобіну в еритроциті. При обстеженні чотирьох хлопців отримали такі значення показника кольору: 0,86; 0,94; 0,98; 1. При обстеженні шести дівчат значення виявились рівними: 0,85; 0,88; 0,91; 0,84; 1,1; 0,87. Знайти вибіркові середні та оцінити їх точність при надійності $\gamma = 0,95$. Чи суттєвими є відмінності в середніх значеннях показника кольору? Альтернативна гіпотеза: $M(X) \neq M(Y)$.

3. При обстеженні п'яти хлопців отримано такі значення (X) швидкості осідання еритроцитів (мм/год): 8,6; 0,99; 9,8; 5,0; 4,0. При обстеженні шести дівчат значення (Y) виявились рівними: 5,8; 9; 8,4; 11; 15; 10. Знайти вибіркові середні та виправлені вибіркові дисперсії. Чи суттєвими є відмінності в середніх значеннях швидкості осідання еритроцитів? Рівень значущості 0,05. Альтернативна гіпотеза: $M(X) < M(Y)$.

4. Визначали кількість лейкоцитів у дітей дошкільного віку та учнів молодших класів. Для дошкільнят отримали такі значення ($10^9/\text{л}$): 12; 11; 9,8; 10; 9. У школярів: 8,5; 8,8; 9; 8,7. Знайти вибіркові середні та оцінити їх точність. Чи суттєвими є відмінності в середніх значеннях швидкості осідання еритроцитів? Рівень значущості $\alpha = 0,05$. Альтернативна гіпотеза: $M(X) \neq M(Y)$.

5. Визначали концентрацію гемоглобіну в крові пацієнтів різних вікових категорій. При обстеженні дорослих одержано такі значення ($10^{13}/\text{л}$): 115; 140; 98; 120; 89. При обстеженні дітей: 85; 127; 119; 130; 124; 111. Знайти вибіркові середні та оцінити їх точність. Чи суттєвими є відмінності в середніх значеннях вмісту гемоглобіну у різних вікових категорій? Рівень значущості 0,05. Альтернативна гіпотеза: $M(X) < M(Y)$.

6. Перевірити гіпотезу про рівність двох середніх вибіркових при рівній значущості $\alpha = 0,05$, якщо $\bar{x}_1 = 125$, $\bar{x}_2 = 130$, $n_1 = 60$, $n_2 = 50$, $s_1^2 = 12$, $s_2^2 = 10$.

7. Перевірити гіпотезу про рівність двох середніх вибіркових при рівній значущості $\alpha = 0,01$, якщо $\bar{x}_1 = 160$, $\bar{x}_2 = 155$, $n_1 = 20$, $n_2 = 13$, $s_1^2 = 12$, $s_2^2 = 10$.

8. Перевірити гіпотезу про рівність вибіркової та генеральної середніх при рівній значущості $\alpha = 0,05$, якщо $\bar{x}_b = 21$, $\bar{x}_r = 20$, $n = 30$, $\sigma^2 = 0,4$.

9. Перевірити гіпотезу про рівність вибіркової та генеральної середніх при рівній значущості $\alpha = 0,05$, якщо $\bar{x}_b = 5,2$, $\bar{x}_r = 5$, $n = 25$, $\sigma^2 = 0,2$.

10. Перевірити гіпотезу про рівність двох виправлених вибіркових дисперсій при заданому рівні значущості $\alpha = 0,01$, якщо $s_1^2 = 3$, $s_2^2 = 1$, $n_1 = 16$, $n_2 = 14$.

11. Перевірити гіпотезу про рівність двох виправлених вибіркових дисперсій при заданому рівні значущості $\alpha = 0,05$, якщо $s_1^2 = 4$, $s_2^2 = 2$, $n_1 = 25$, $n_2 = 30$.

12. Перевірити гіпотезу про рівність виправленої вибіркової та генеральної дисперсії при заданому рівні значущості $\alpha = 0,01$, якщо $s^2 = 4$, $\sigma^2 = 3,6$, $n = 15$.

13. Перевірити гіпотезу про рівність двох виправлених вибіркових дисперсій при заданому рівні значущості $\alpha = 0,05$, якщо $s_1^2 = 9$, $s_2^2 = 10$, $n_1 = 7$, $n_2 = 12$.

14. При рівній значущості $\alpha = 0,05$ перевірити чи значуще відрізняються середні значення зросту студентів військового та фармацевтичного факультетів. Середній зріст студента військового факультету (179 см) визначався із вибірки об'ємом $n_1 = 25$, а середній зріст студента-фармацевта (174 см) був визначений на основі вибірки об'ємом $n_2 = 14$. Оцінки дисперсій рівні відповідно $s_1^2 = 2 \text{ см}^2$, $s_2^2 = 1,5 \text{ см}^2$.

9.1. КОРЕЛЯЦІЙНА ТА СТАТИСТИЧНА ЗАЛЕЖНІСТІ

Часто доводиться мати справу з випадковими величинами, залежність між якими є статистичною (на відміну від функціональної, строго детермінованої залежності). Наприклад, зв'язок між ростом людини та її масою, зниженням температури зовнішнього середовища і зростанням кількості пропагандних захворювань, певним фізіологічним параметром і дозою лікарського препарату тощо.

Статистичною називають залежність, при якій зміна однієї з величин призводить до зміни розподілу іншої. Зокрема, якщо при зміні однієї з величин змінюється середнє значення іншої, то таку статистичну залежність називають **кореляційною**.

Кореляційну залежність випадкової величини Y від величини X можна описати рівнянням виду

$$M(Y)_x = f(x), \quad (9.1)$$

де $M(Y)_x$ – умовне математичне сподівання величини Y , яке відповідає даному значенню x випадкової величини X . Рівняння (9.1) називають *рівнянням регресії Y на X* .

Аналогічно можна визначити рівняння регресії X на Y та умовне математичне сподівання випадкової величини X

$$M(X)_y = g(y). \quad (9.2)$$

Лінію на площині, яка відповідає рівнянню (9.1) чи (9.2), називають *лінією регресії*.

Лінія регресії Y на X показує, як залежить середнє значення Y від X . Якщо побудувати точки (x_i, \bar{y}_{x_i}) в декартовій системі координат, то за характером розміщення цих точок можна зробити припущення про форму лінії регресії та відповідну форму кореляційною зв'язку – лінійну, квадратичну, логарифмічну тощо. Дійсно, у випадку, поданому на рис. 9.1, природно припустити про можливу наявність лінійного кореляційного зв'язку між досліджуваними величинами, а рис. 9.2 свідчить про можливу наявність квадратичної залежності.

Варто мати на увазі, що наявність фізичного причинно-наслідкового зв'язку між X та Y проявляється в кореляційній залежності. Обернене твердження невірне: кореляційний зв'язок не означає існування фізичної залежності. Причиною може бути як непрезентативність вибірки, так і залеж-

ність обох величин X та Y від деякої іншої величини Z . Наведемо відомий приклад такої ситуації. В 60-ті роки у Швеції досліджували наявність кореляції між кількістю лелек, що прилітають, та кількістю немовлят, що народжуються. Отримані результати свідчили про тісну лінійну кореляцію (розрахунки коефіцієнта кореляції давали значення, близькі до одиниці). Як можна пояснити такий результат? Справа в тому, що кількість лелек залежить від числа окремих садіб, а число окремих садіб, як і кількість новонароджених дітей, визначається числом сімей.

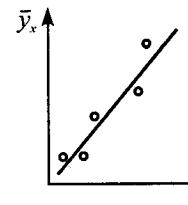


Рис. 9.1

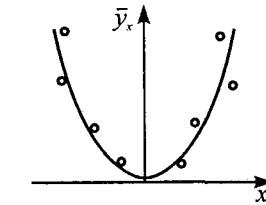


Рис. 9.2

9.2. ЛІНІЙНА КОРЕЛЯЦІЯ

Кореляційна залежність між X та Y називається *лінійною кореляцією*, якщо обидві функції регресії є лінійними. В такому випадку обидві лінії регресії є прямими; їх називають прямими регресії. Рівняння прямих регресії X на Y та Y на X мають вигляд:

$$y = p\left(\frac{X}{Y}\right)(x - a) + b, \quad (9.3)$$

$$x = p\left(\frac{Y}{X}\right)(y - b) + a, \quad (9.4)$$

де $a = M(X)$, $b = M(Y)$, а $p\left(\frac{X}{Y}\right)$, $p\left(\frac{Y}{X}\right)$ – кутові коефіцієнти прямих регресій. На практиці для знаходження кутових коефіцієнтів використовують метод найменших квадратів (див. п. 9.5).

Кутовий коефіцієнт прямої регресії X на Y :

$$p\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{M(XY) - M(X) \cdot M(Y)}{D(Y)} = \frac{\mu}{\sigma_2^2},$$

а кутовий коефіцієнт прямої регресії Y на X :

$$p\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{M(XY) - M(X) \cdot M(Y)}{D(X)} = \frac{\mu}{\sigma_1^2}.$$

Значення кутових коефіцієнтів свідчать про силу кореляційного зв'язку: чим більший коефіцієнт $r\left(\frac{Y}{X}\right)$, тим сильнішим є кореляційний зв'язок. Сила зв'язку є важливою, але недостатньою характеристикою кореляційних залежностей. Так, у випадках, поданих на рис. 9.3, *a* і *b*, сили зв'язку є однаковими, про що свідчить рівність кутів нахилу лінії регресії Y на X відносно осі Ox . Проте розкид значень Y відносно одних і тих самих значень X є різним. Можна сказати, що ці залежності відрізняються тіснотою зв'язку: зображені на рис. 9.3, *a* зв'язок вважають тіснішим, ніж на рис. 9.3, *b*. Щоб оцінити, наскільки тісним є кореляційний зв'язок між випадковими величинами використовують **коєфіцієнт кореляції** r , який визначається за формулою

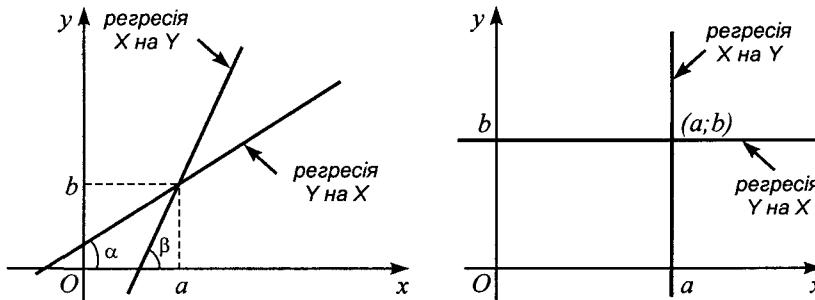
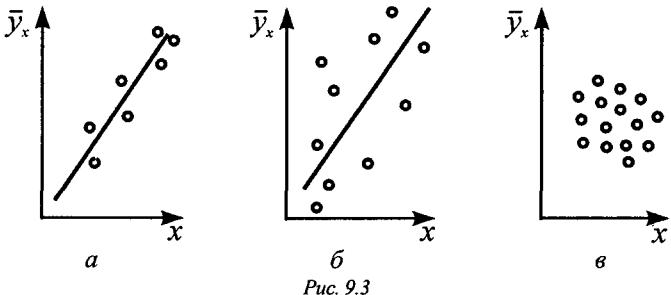
$$r = \frac{M(XY) - M(X) \cdot M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \quad (9.5)$$

або більш коротко

$$r = \frac{\mu}{\sigma_1\sigma_2}, \quad (9.6)$$

де $\mu = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$, $\sigma(X) = \sigma_1$, $\sigma(Y) = \sigma_2$.

Якщо випадкові величини не залежать одна від одної (не корелюють між собою), то $r = 0$ (обернене твердження не справедливе, оскільки і у випадку функціональної нелінійної залежності r може бути рівним нулю). Коефіцієнт кореляції може набувати значення $|r| \leq 1$, причому $r = \pm 1$ у випадках лінійної функціональної залежності між X та Y . Рис. 9.3, *a* ілюструє випадки тісної кореляції ($0,7 < r < 1$), рис. 9.3, *b* – слабкої кореляції ($0,4 < r < 0,7$); практичну відсутність кореляції ($r \leq 0,4$) ілюструє рис. 9.3, *c*.



Якщо скористатись коефіцієнтом кореляції, то рівняння прямих регресії можна записати в більш симетричному вигляді:

$$y - b = r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - a), \quad x - a = r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - b). \quad (9.7)$$

Із цих рівнянь видно, що обидві прямі регресії проходять через точку з координатами $(a; b)$ (рис. 9.4), кутові коефіцієнти прямих регресії рівні відповідно:

$$\operatorname{tg} \alpha = r \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{r} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

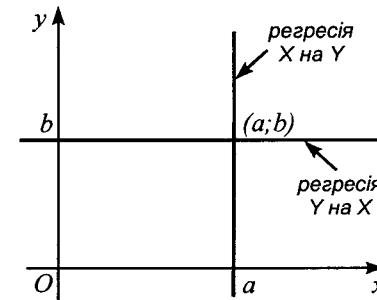
Оскільки $|r| \leq 1$, то $|\operatorname{tg} \alpha| \leq |\operatorname{tg} \beta|$. Це означає, що пряма регресії Y на X має менший нахил до осі абсцис, ніж пряма регресії X на Y . Чим більше r до 1, тим менший кут між прямими регресії. Ці прямі зливаються тоді і тільки тоді, коли $|r| = 1$. При $r = 0$ прямі регресії набирають вигляду $y = b$; $x = a$ (рис. 9.5).

Майбутні події кидають свої тіні назад.
Т. Кемпбел

Потрібно пам'ятати, що коефіцієнт кореляції характеризує тісноту зв'язку не в усіх випадках. Наприклад, з рис. 9.2 добре видно, що між випадковими величинами X та Y існує квадратичний кореляційний зв'язок. Розрахунки коефіцієнта кореляції в такому випадку дадуть близькі до нуля значення.

9.3. РОЗРАХУНОК ПРЯМИХ РЕГРЕСІЙ

Припустимо, що проведено n дослідів, в яких отримали n значень кожної з величин X та Y . За приблизні значення $M(X)$ та $M(Y)$ приймають



середні вибіркові \bar{x}_b та \bar{y}_b . Виправлені дисперсії s^2 є незміщеними оцінками для σ^2 :

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_b)^2, \quad (9.8)$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_b)^2. \quad (9.9)$$

Оцінкою для μ служить величина

$$\mu_b = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_b)(y_i - \bar{y}_b). \quad (9.10)$$

Підставивши в (9.6) і (9.7) замість μ , σ_1^2 та σ_2^2 відповідно μ_b , s_1^2 та s_2^2 , отримаємо вибіркове рівняння регресії та значення вибіркового коефіцієнта кореляції.

Приклади. 1. За даними 10 спостережень отримані значення зросту X (см) та маси Y (кг) немовлят

X	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Y	8,6	8,9	8,9	9,0	9,1	9,2	9,2	9,2	9,3	9,4

Знайти рівняння регресії Y на X .

Обчислюємо $\bar{x}_b = 75,5$; $\bar{y}_b = 9,08$. Для подальших обчислень складемо таблицю:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
$x_i - \bar{x}_b$	-4,5	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	—
$(x_i - \bar{x}_b)^2$	20,25	12,25	6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	6,25	12,25	20,25	82,5
$y_i - \bar{y}_b$	-0,48	-0,18	-0,18	0,08	0,02	0,12	0,12	0,12	0,22	0,32	—
$(x_i - \bar{x}_b)(y_i - \bar{y}_b)$	2,16	0,63	0,45	-0,12	-0,01	0,06	0,18	0,30	0,77	1,44	5,86

За даними таблиці знайдемо:

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_b)^2 = 9,17; \quad \mu_b = 0,65; \quad \frac{\mu_b}{s_1^2} \approx 0,071.$$

Рівняння шуканої прямої має вигляд

$$y - 9,08 = 0,071(x - 75,5)$$

або

$$y = 0,071x + 3,72.$$

2. Встановити наявність кореляційного зв'язку між ростом та масою немовлят за даними попереднього прикладу.

Щоб обчислити коефіцієнт кореляції за даними таблиці, розрахуємо виправлену дисперсію s_2^2 для величини y

$$s_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y}_b)^2 = \frac{0,5}{9} \approx 0,06.$$

Оцінкою σ_2 слугить $s_2 = 0,25$, а оцінкою σ_1 є $s_1 = 3,02$.

Коефіцієнт кореляції згідно з формулою (9.6)

$$r = \frac{0,65}{3,02 \cdot 0,25} \approx 0,9.$$

Обчислимо кутові коефіцієнти прямих регресії

$$\operatorname{tg} \alpha = r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,9 \cdot \frac{0,25}{3,02} \approx 0,07;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{r} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{0,9} \cdot \frac{0,25}{3,02} \approx 0,09.$$

Отримані результати свідчать про наявність тісного кореляційного зв'язку між параметрами x та y .

9.4. ПЕРЕВІРКА ЗНАЧУЩОСТІ ВИБІРКОВОГО КОЕФІЦІЕНТА КОРЕЛЯЦІЇ

На практиці для оцінки тісноти лінійного кореляційного зв'язку використовують вибірковий коефіцієнт кореляції, який визначається за формулою:

$$r = \frac{\mu}{s_1^2 \cdot s_2^2}, \quad (9.11)$$

де s_1^2 та s_2^2 обчислюються за формулами (9.8) та (9.9), а μ – за (9.10).

Вибірковий коефіцієнт кореляції служить оцінкою генерального r , взагалі кажучи, може відрізнятись від нього за значенням. Крім того, вибірковий коефіцієнт може виявитись не рівним нулю навіть за відсутності лінійної кореляції між досліджуваними величинами X та Y в генеральній сукупності. Тому після обчислення r за формулою (9.11), як правило, перевіряють гіпотезу про значущість вибіркового коефіцієнта кореляції. З цією метою обчислюють експериментальне значення критерію t , який має розподіл Стьюдента:

$$t = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (9.12)$$

де n – об’єм вибірки. Потім, задавшись рівнем значущості p , за табл. 6 додатку знаходять критичне значення $t_{kp}(p; n-2)$ для двосторонньої критичної області. Якщо $|t| > t_{kp}$, то вважають коефіцієнт кореляції значущим, якщо ж $|t| < t_{kp}$ – то ні.

Приклад. При рівні значущості $\rho = 0,05$ перевірити значущість коефіцієнта кореляції, отриманого в попередньому прикладі 2.

За формулою (9.12) знайдемо експериментальне значення критерію t :

$$t = \frac{0,9\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0,9^2}} \approx 6.$$

Враховуючи, що число ступенів вільності $k = 10 - 2 = 8$, за табл. 6 додатку знаходимо $t(0,05; 8) = 2,31$. Оскільки $t > t_{kp}$, робимо висновок про значущість вибікового коефіцієнта кореляції.

9.5. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТИВ

Метод найменших квадратів служить для оцінки невідомих величин за результатами вимірювань, які містять випадкові похибки. Серед багатьох застосувань цього методу найважливішим є знаходження рівняння, яке найбільш точно описує дану залежність для подання дослідних результатів.

Процес практичного використання цього методу складається з двох етапів: на першому вибирають вид шуканої формулі, а на другому підбирають для неї параметри. На рис. 9.6 наведені експериментальні дані, для яких за емпіричну формулу можна прийняти лінійну залежність $y = ax + b$; для даних

рис. 9.7 – квадратичну $y = ax^2 + bx + c$.

Згідно з ідеєю методу найменших квадратів потрібно мінімізувати суму

$$S = \sum_{i=1}^n (\bar{y}(x_i) - y_i)^2,$$

де x_i, y_i – значення дослідних даних; $\bar{y}(x_i)$ – значення функції, взяте на емпіричній залежності в точці x_i ; n – число дослідів.

У випадку лінійної емпіричної формули сума набуває вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

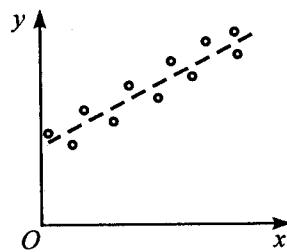


Рис. 9.6

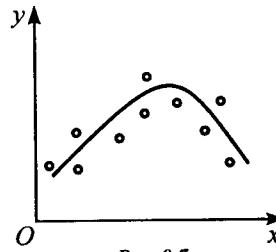


Рис. 9.7

Ця функція має мінімуми в точках, де частинні похідні від S за параметрами a та b перетворюються в нуль. У результаті диференціювання та елементарних перетворень для визначення параметрів отримують нормальну систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими a та b :

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (9.13)$$

У випадку квадратичної залежності мінімізують суму $S = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$.

Тоді нормальна система складається з трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i; \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Приклад. Дослідні дані про значення x та y подані в таблиці.

x	1	2	3	4	5	6
y	15	10	2	-2	-4	-10

Аналіз експериментальних даних показує, що як емпіричну залежність можна використовувати лінійну $y = ax + b$. Знайдемо методом найменших квадратів значення a та b . Обчислення зручно виконати за допомогою таблиці.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	15	1	15
2	2	10	4	20
3	3	2	9	6
4	4	2	16	8
5	5	-4	25	-20
6	6	-10	36	-60
Σ	21	15	91	-31

Підставляючи отримані дані в систему рівнянь (9.13), матимемо

$$\begin{cases} 91a + 21b = -31; \\ 21a + 6b = 15. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримаємо такі значення коефіцієнтів: $a \approx -4,76$; $b \approx 19,2$. Тепер емпірична формула набуває вигляду

$$y = -4,76x + 19,2.$$

Не існує загального правила для вибору вигляду емпіричної формули; про цього можна лише здогадуватись за формою кривої, яка геометрично ілюструє результати. Інколи з цією метою використовують спеціальні таблиці.

Номер формули	\bar{x}_s	\bar{y}_s	Вид емпіричної формули
1	$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$	$y = ax + b$
2	$\sqrt{x_1 x_n}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = ax^b$
3	$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = ab^x$ або $y = ae^{\beta x}$, де $\beta = \ln b$
4	$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$	$y = a + \frac{b}{x}$
5	$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$	$y = \frac{1}{ax + b}$
6	$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$	$y = \frac{x}{ax + b}$
7	$\sqrt{x_1 x_n}$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$	$y = a \lg x + b$

Для перевірки придатності вибраної формули знаходять за експериментальними даними \bar{x}_s та \bar{y}_s . Потім порівнюють y , яке відповідає \bar{x}_s у вихідних даних, із значенням \bar{y}_s . Якщо ж \bar{x}_s не знаходиться серед вихідних даних, то відповідне значення можна визначити лінійною інтерполяцією

$$\hat{y}_s = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (\bar{x}_s - x_i),$$

де x_i та x_{i+1} – проміжні значення, між якими знаходиться \bar{x}_s . Про придатність емпіричної формули судять з різниці $|\hat{y}_s - \bar{y}_s|$.

Якщо ця різниця велика, то формула непридатна.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Знайти коефіцієнт кореляції за даними вибірки:

X_i	31	1,5	3,7	2,8	0,5	3,5	4,5	2,0	0,9
Y_i	1,7	1,2	3,0	2,5	0,7	2,2	2,6	1,9	1,8

Розв'язання. Знаходимо вибіркові середні:

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i = 2,50;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 Y_i = 1,96.$$

Скориставшись формулами (9.3), (9.4) та (9.5), знаходимо значення коефіцієнта кореляції

$$r = \frac{\mu}{s_1 \cdot s_2} \approx 0,84.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що між випадковими величинами X і Y існує сильний кореляційний зв'язок.

2. Визначити вигляд емпіричної формули, яка відповідає даним таблиці.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	12	35	75	125	210	315	445	600	800

Розв'язання. У випадку лінійної залежності $y = ax + b$ відповідно до таблиці на с. 180, $\bar{x}_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+10}{2} = 6$; $\bar{y}_s = \frac{y_1 + y_2}{2} = 406$; $\hat{y}_s = 210$; а $|\hat{y}_s - \bar{y}_s| = 196$.

Розрахунки зручно подати у вигляді таблиці, аналогічно до наведеної на с. 180. Величини \bar{x}_s та \bar{y}_s знаходились за відповідними формулами.

№	\bar{x}_s	\bar{y}_s	\hat{y}	$ \hat{y}_s - \bar{y}_s $	Вид емпіричної формули
1	6	406	210	196	$y = ax + b$ (не підходить)
2	4,47	98	98,5	0,5	$y = ax^b$ (підходить краще за інші)
3	6	98	210	112	$y = ab^x$ (не підходить)
4	3,3	406	47	359	$y = a + \frac{b}{x}$ (не підходить)
5	6	23,6	210	186,4	$y = \frac{1}{ax + b}$ (не підходить)
6	3,3	23,6	47	23,4	$y = \frac{x}{a\bar{x} + b}$ (не підходить)
7	4,47	406	98,5	307,5	$y = a \lg x + b$ (не підходить)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити коефіцієнт кореляції між випадковими величинами X і Y .

X	3,1	1,5	3,7	2,8
Y	1,7	1,2	3,0	2,5

2. Досліджували проби крові стосовно вмісту калію (X) та магнію (Y).

X (мкмоль/л)	3,2	3,4	3,8	3,9	4,0	5,3	5,5
Y (мкмоль/л)	0,6	0,7	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3

Перевірити наявність кореляційного зв'язку між випадковими величина-ми X та Y . Отримати рівняння регресії Y на X .

3. Досліджували проби крові стосовно вмісту заліза (X) та фосфору неор-ганічного (Y).

X (мкмоль/л)	9	12	13	21	27	30	32
Y (мкмоль/л)	0,6	2,0	0,85	2,0	1,1	1,2	2,0

Перевірити наявність кореляційного зв'язку між випадковими величина-ми X та Y . Отримати рівняння регресії Y на X .

4. Досліджували проби крові п'яти осіб різного віку (X) стосовно вмісту креатиніну (Y).

X (роки)	0,5	3	17	37	40
Y (мкмоль/л)	20	24	50	48	56

Перевірити наявність кореляційного зв'язку між випадковими величина-ми X та Y . Отримати рівняння регресії Y на X .

5. За даними вимірювань зросту X та маси Y новонароджених у полого-вому будинку побудувати емпіричну лінію регресії.

X (см)	46	46,5	47	48	50	51	52
Y (кг)	2,25	3,75	3,5	3,4	3,5	3,7	4

6. При рівнях значущості $\alpha_1 = 0,05$ та $\alpha_2 = 0,01$ перевірити значущість вибікового коефіцієнта кореляції $r_b = 0,2$ для вибірок з об'ємами: $n_1 = 11$; $n_2 = 9$, $n_3 = 27$; $n_4 = 102$.

10 ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Для порівняння генеральних середніх декількох нормально розподілених сукупностей з однаковими, можливо й невідомими, дисперсіями використовують дисперсійний аналіз. На практиці найчастіше дисперсійний аналіз застосовують для оцінки впливу різних факторів, які можуть мати або не мати числову природу, на досліджувану величину.

Наприклад, при лікуванні певного захворювання можуть бути використані окрім групи лікарських препаратів. Кожен із препаратів, називатимемо їх факторами, може чинити, а може й не чинити суттєвого впливу на досліджуваний фізіологічний параметр. Дисперсійний аналіз дозволяє підтвердити або відхилити припущення про наявність такого впливу. Інший приклад. Лікарські рослини, зібрани з декількох експериментальних ділянок, досліджуються на вміст певного компонента. Потрібно оцінити, чи впливають умови вирощування на вміст даного компонента.

Залежно від кількості факторів, вплив яких оцінюється, розрізняють одно- та багатофакторний аналіз. Для оцінювання впливу факторних ознак на досліджувану величину (результативну ознаку) значення цієї величини часто розділяють на декілька рівнів, кожен з яких відповідає певному значенню факторної ознаки. При дослідженні впливу певного лікар-

ства статистика – сукупність методів, які дозволяють приймати рішення в умовах невизначеності.

Абрахам Вальд

ського препарату на деякий фізіологічний показник різним рівням можуть відповісти, наприклад, різні дози препарату. У другому з наведених прикладів число рівнів може визначатися кількістю досліджуваних ділянок або кількістю груп, в які ці ділянки можуть бути об'єднані за певними значеннями факторної ознаки. Наприклад, за інтенсивністю сонячного опромінення ділянки можна розділити на три рівні: ті, що знаходяться в південному регіоні, північному та середній смузі.

У найпростішому випадку однофакторного дисперсійного аналізу значення, які спостерігаються, можна подати у вигляді таблиці.

Номер випробування, i	Рівень фактора			
	A_1	A_2	...	A_p
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2p}
:	:	:	:	:
q	x_{q_11}	x_{q_22}	...	$x_{q,p}$
Групова середня	\bar{x}_1	\bar{x}_2	...	\bar{x}_p

Зауважимо, що кількість випробувань (спостережень) на кожному рівні може бути різною. Загальна кількість випробувань

$$N = q_1 + q_2 + \dots + q_p = \sum_{j=1}^p q_j.$$

Ми вважали, що на першому рівні проведено q_1 випробувань, на другому – q_2 і т. д.

Всі значення величини X , що мають місце при кожному фіксованому рівні фактора A , складають групи. В останньому рядку таблиці подають відповідні групові середні. Крім групових середніх x_j ($j = 1, 2, \dots, p$, де p – кількість рівнів), підраховують також середнє \bar{x} всіх значень вибірки.

В основі однофакторного дисперсійного аналізу лежить рівність

$$S_{\text{залиш}} = S_{\text{заг}} - S_{\text{факт}},$$

де $S_{\text{зар}} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{q_j} (x_{ij} - \bar{x})^2$ – загальна сума квадратів відхилень значень x , що

спостерігаються, від середнього \bar{x} ; $S_{\text{факт}} = \sum_{j=1}^p q_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$ – факторна сума

квадратів відхилень групових середніх від загальної середньої.

В математичній статистиці доводиться, що $S_{\text{факт}}$ характеризує вплив фактора A , $S_{\text{зар}}$ відображає вплив і фактора, і випадкових причин, а $S_{\text{залиш}}$ – вплив випадкових причин.

Розділивши суми квадратів відхилень на відповідну кількість ступенів вільності, отримаємо загальну, факторну та залишкову дисперсії:

$$S_{\text{зар}}^2 = \frac{S_{\text{зар}}}{N-1}; \quad S_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{p-1}; \quad S_{\text{залиш}}^2 = \frac{S_{\text{залиш}}}{N-p},$$

де p – число рівнів фактора; N – загальна кількість спостережень; $k_1 = p - 1$ – число ступенів вільності факторної дисперсії; $k_2 = N - p$ – число ступенів вільності залишкової дисперсії.

На практиці для знаходження $S_{\text{факт}}$ та $S_{\text{залиш}}$ частіше використовують формули:

$$S_{\text{факт}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^p R_j^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^p R_j \right)^2}{p-1}; \quad S_{\text{залиш}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^p P_j - \sum_{j=1}^p \frac{R_j^2}{q_j}}{N-p}. \quad (10.1)$$

Тут $R_j = \sum_{i=1}^{q_j} x_{ij}$ – сума значень величини X на рівні A_j ; $P_j = \sum_{i=1}^{q_j} x_{ij}^2$ – сума квадратів значень величини X на рівні A_j .

Відношення

$$F = \frac{s_{\text{факт}}^2}{s_{\text{залиш}}^2} \quad (10.2)$$

характеризує вплив факторної ознаки. Чим більший вплив факторної ознаки, тим більше значення F . Якщо $F \leq 1$, то потрібно зробити висновок про відсутність суттєвого впливу фактора A на досліджувану (результативну) ознаку. Якщо $F > 1$, потрібно, використовуючи метод, наведений в п. 8.2, перевірити, чи значущі відмінності цих дисперсій (основна гіпотеза $s_{\text{факт}}^2 = s_{\text{залиш}}^2$, альтернативна – $s_{\text{факт}}^2 > s_{\text{залиш}}^2$). Якщо перевірка покаже значущість відмінностей $s_{\text{факт}}^2$ (число ступенів вільності $k_1 = p - 1$, p – кількість рівнів) та $s_{\text{залиш}}^2$ (число ступенів вільності $k_2 = N - p$, N – загальна кількість випробувань), то робимо висновок про суттєвий вплив фактора A на результативну ознаку.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Проведено 10 досліджень з визначення концентрації білка у сироватці крові у осіб різних вікових категорій. Із них чотири вимірювання виконано у новонароджених, чотири – у підлітків і два – у дорослих. Результати досліджень наведені в таблиці. При рівні значущості 0,05 перевірити гіпотезу про рівність групових середніх.

Номер випробування, i	Концентрація білка, %, для рівнів фактора		
	Новонароджені	Підлітки	Дорослі
1	40	80	92
2	44	71	76
3	36	62	—
4	48	91	—
\bar{x}_i	42	76	84

Спочатку обчислимо P_j та R_j :

$$P_1 = 40^2 + 44^2 + 36^2 + 48^2 = 7136; \quad P_2 = 23566; \quad P_3 = 14240,$$

$$R_1 = 40 + 44 + 36 + 48 = 168; \quad R_2 = 304; \quad R_3 = 168.$$

Скориставшись формулами (10.1), знайдемо

$$S_{\text{факт}}^2 = \frac{\frac{168^2}{4} + \frac{304^2}{4} + \frac{168^2}{2} - \frac{1}{10}(168 + 304 + 168)^2}{2} \approx 1387;$$

$$s_{\text{залиш}}^2 = \frac{(7136 + 23566 + 14240) - \frac{168^2}{4} + \frac{304^2}{4} + \frac{168^2}{2}}{7} \approx 58.$$

Значення критерію Фішера–Сnedекора

$$F = \frac{s_{\text{факт}}^2}{s_{\text{залиш}}^2} = \frac{1387}{58} \approx 24.$$

За табл. 7 додатку за числом ступенів вільності $k_1 = 3 - 1 = 2$, $k_2 = 10 - 3 = 7$ і при заданому рівні значущості $\alpha = 0,05$ знаходимо критичну точку $F_{\text{кр}}(0,05; 2; 7) = 4,74$. Оскільки розраховане $F > F_{\text{кр}}$, робимо висновок, що групові середні значно відрізняються, тобто з віком концентрація білка в сироватці крові змінюється суттєво.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ за даними таблиці перевірити ефективність дії X-променів на темп розмноження бактерій певного виду. Рівень розмноження подано у відсотках.

Номер випробування	Рівень розмноження при дозі опромінення, Р		
	10^3	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$
1	97	90	75
2	96	89	77
3	95	88	74
4	94	87	72
5	93	—	79
6	92	—	—

2. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ за даними таблиці перевірити вплив деякого препарату на даний фізіологічний показник (в умовних одиницях).

Номер випробування	Фізіологічний показник при дозі препарату, мг		
	$F_1 = 10$	$F_2 = 20$	$F_3 = 40$
1	120	134	140
2	119	121	138
3	121	128	121
4	124	130	130
5	122	123	129

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Загальні відомості про функції

1. $[-3; 3]$. 2. $(-\infty; -\infty)$. 3. $(-\infty; -1)$, $(-1; \infty)$. 8. $[-1; 1]$. 9. $[-4; \infty)$. 10. 3. 13. 3. 15. 0,5. 16. 3. 17. 0,4. 18. 1. 20. $\frac{1}{3}$. 21. -8 . 23. $\frac{1}{e}$. 24. $\frac{1}{e}$. 25. e. 26. $-\infty$. 27. 0. 28. Неперервна. 29. Неперервна. 30. Однакового. 31. Вищого. 32. Однакового. 33. Вищого. 34. Вищого.

2. Елементи диференціального числення

1. $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2$. 2. $y' = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$. 3. $y' = 2ax + b$. 4. $y' = -2x^{-2}$.
 5. $y' = -\frac{15x^2}{a}$. 6. $y' = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 7. $y' = -\frac{\pi}{x^2} + \frac{1}{x}$. 8. $y' = \frac{b(c-a)}{(c+bx)^2}$. 9. $y' = \frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x - 5)^2}$.
 10. $y' = 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-4}$. 11. $y' = 2x \cdot \sqrt[3]{x^2} + x^2 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. 12. $y' = \frac{x-1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$. 13. $y' = -\frac{4}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x^2}$. 14. $y' = \frac{1}{\sqrt{z}(1-\sqrt{z})}$. 15. $y' = 5 \cos x - 3 \sin x$. 16. $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$.
 17. $y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$. 18. $y' = t^2 \sin t$. 19. $y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$. 20. $y' = \operatorname{ctgx} - \frac{x}{\sin^2 x}$.
 21. $y' = \arcsin x + x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 22. $y' = 2x \operatorname{arctg} x + 1$. 23. $y' = x^6 e^x (7+x)$.
 24. $y' = xe^x$. 25. $y' = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$. 26. $y' = \frac{x^4(5-x)}{e^x}$. 27. $f' = e^x (\cos x - \sin x)$.
 29. $y' = e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$. 30. $y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$. 31. $y' = 3x^2 \ln x$. 32. $y' = \frac{2x-2+\ln x}{x^2}$.
 34. $y' = 16x(3+2x^2)^3$. 35. $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 36. $y' = bx^2(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$. 38. $y' = -10 \cos x (3-2 \sin x)^4$.
 39. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 3x} + \frac{1}{\cos^2 5x}$. 40. $y' = -\frac{1}{2 \sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctgx} x}}$. 41. $y' = 2 - 15 \cos^2 x \sin x$. 42. $y' = e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x$. 43. $f' = 12 \sin 2x (1-3 \cos 2x)$. 44. $y' = -\sin x \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)$. 45. $y' = \frac{3 \cos x + 2 \sin x}{2 \sqrt{3 \sin x - 2 \cos x}}$. 46. $y' = \frac{1}{2} (1 + \arcsin x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 47. $y' = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+x^2) \sqrt{\operatorname{arctg} x}}$.
 48. $y' = -\operatorname{arctg}^{-2} x \cdot \frac{1}{1+x^2}$. 49. $y' = \frac{1}{2} (e^{x^2} + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (e^{x^2} \cdot 2x + 1)$. 51. $y' = 3 \cos 3x - \frac{1}{5} \sin \frac{x}{5} + \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$. 52. $y' = \cos(x^2 - 5x + 1)(2x - 5) - \frac{a}{x^2 \cos^2 \frac{a}{x}}$. 53. $f' = -\alpha \sin(\alpha x + \beta)$.

$$55. y' = -\frac{4 \sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}. \quad 56. y' = \frac{a}{a^2 + x^2}. \quad 57. y' = 8x \sin x^2 - 10x \sin 5x^2. \quad 58. y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

$$59. y' = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}. \quad 60. y' = \frac{4 \ln x^2}{x}. \quad 61. f' = \sin 2t + 2t \cos 2t. \quad 62. f' = -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

$$63. y' = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}. \quad 64. y' = -\frac{1}{x^2+1}. \quad 65. y' = \frac{2}{2x+7}. \quad 66. y' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad 67. y' = 8x^7 + 7 \cdot 6x^5 - 5;$$

$$y'' = 56x^6 + 210x^4. \quad 68. y' = e^{x^2} \cdot 2x; \quad y'' = 2e^{x^2}(2x^2+1). \quad 69. y' = \cos x^2 \cdot 2x;$$

$$y'' = 2(\cos x^2 - 2x^2 \sin x^2). \quad 70. y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{1+x^2}; \quad y'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}. \quad 71. y' = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}; \quad y'' = -\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$$

$$72. f' = 2x \operatorname{arctg} x + 1; \quad f'' = 2 \operatorname{arctg} x - \frac{2x}{1+x^2}. \quad 73. y' = 2 \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad y'' = 2 \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}.$$

$$75. dy = \frac{e^x + 5 \cos x - 4}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 76. dy = \frac{1}{2(x+1)} \left(\frac{1}{\sqrt{\ln(x+1)}} + 1 \right) dx. \quad 77. dy = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2} \cdot \arcsin 5x} dx.$$

$$78. dy = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} dx. \quad 79. dy = (\operatorname{ctg} x + 3x^2) dx. \quad 80. dy = \left(3 \sin 6x + \frac{2}{x} \right) dx. \quad 81. dy = \frac{x^2}{\sin^4 3x} \times$$

$$\times (3 \sin^2 3x - 3x \sin 6x) dx. \quad 84. dy = 15 \sin^2 5x \cos 5x \cos^2 \frac{x}{3} dx - \frac{1}{3} \sin^3 5x \sin \frac{2x}{3} dx. \quad 85. dy = \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

$$86. dy = -2 \operatorname{tg} x \ln \cos x dx. \quad 87. dy = \frac{e^2}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) dx. \quad 88. dy = e^{\sin x} \cos x (\sin x + 1) dx. \quad 89. dy = -e^x \sin e^x dx.$$

$$90. dy = \frac{6}{x} \ln^2 x^2 dx. \quad 91. v = 5 - 0,002t; \quad a = -0,002 \text{ м/с}^2 = \text{const}. \quad v_0 = 5 \text{ м/с}; \quad v_1 = 4,998 \text{ м/с}; \quad v_2 = 4,9 \text{ м/с}.$$

$$92. x = 33,3 \%. \quad 94. (0,5; 2,25) - \text{max}. \quad 95. (-2; 25) - \text{max}; (1; -2) - \text{min}. \quad 100. \ln 2. \quad 104. 0.$$

3. Функції багатьох змінних

$$1. \quad y'_x = te^{-t} (2ax - 3x^2); \quad y'_t = x^2(a-x)[e^{-t} + te^{-2t}] \quad 2. \quad z'_x = 3(x^2 - y); \quad z'_y = 3(y^2 - x).$$

$$3. z'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}; \quad z'_y = -\frac{2x}{(x+y)^2} \quad 4. z'_x = -yx^{-2}; \quad z'_y = \frac{1}{x}. \quad 5. z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}; \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

$$6. z'_x = yx^{y-1}; \quad z'_y = x^y \ln x. \quad 7. u'_x = e^x \ln y; \quad u'_y = \frac{e^x}{y}. \quad 8. z'_x = \frac{y}{x}; \quad z'_y = \ln x. \quad 9. z'_x = \operatorname{tg} y;$$

$$z'_y = x \frac{1}{\cos^2 y}. \quad 10. z'_x = -\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} e^{\sin \frac{y}{x}}, \quad z'_y = \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} e^{\sin \frac{y}{x}}. \quad 12. z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$14. u'_x = y \cdot z^x \ln z; \quad u'_y = z^x; \quad u'_z = y \cdot xz^{x-1}; \quad 15. z'_x = \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}; \quad z'_y = -xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$16. u'_x = \frac{2}{x}; \quad u'_y = \frac{1}{y}. \quad 17. u'_x = \cos \frac{x}{y^2 z} \cdot \frac{1}{y^2 z}; \quad u'_y = -\frac{2x}{y^3 z} \cos \frac{x}{y^2 z}; \quad u'_z = -\frac{x}{y^2 z^2} \cos \frac{x}{y^2 z}.$$

$$18. du = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}. \quad 19. dz = (3x^2 - 3y) dx + (3y^2 - 3x) dy. \quad 20. dz = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy. \quad 21. du =$$

$$= -\sin \frac{x}{y} \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \right). \quad 22. du = \cos(x-y)(dx-dy). \quad 23. dz = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} (ydx-xdy). \quad 24. dz =$$

$$= \sin 2y dy - \sin 2x dx. \quad 25. dz = y^2 x^{y-1} dx + x^y (1+y \ln x) dy. \quad 26. dz = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} (ydx-xdy). \quad 27. du =$$

$$= \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \quad 28. dz = \frac{1}{y^2} \left(dx - \frac{2x}{y} dy \right). \quad 29. du = zydx + zx dy + xy dz. \quad 30. dz = \frac{2}{x^2+y^2} \times$$

$$\times (xdx+ydy). \quad 31. du = \frac{z^2}{z^4+x^2y^2} \left(ydx + xdy - 2 \frac{xy}{z} dz \right). \quad 32. dz = -3xy^2 \operatorname{tg}(x^2y^3)(2ydx+3xdy).$$

$$33. du = \frac{37}{(9x-2y)^2} (xdy-ydx). \quad 34. \operatorname{grad} z = \frac{5}{4} i - \frac{3}{4} j. \quad 35. \operatorname{grad} z = 2i+j.$$

4. Елементи інтегрального числення

$$1. x^3 - \frac{1}{2} x^{-4} + c. \quad 5. \frac{x^7}{7} - \frac{9}{5} x^5 + 9x^3 - 27 + c. \quad 6. 2 \sin x + c. \quad 7. \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + c. \quad 8. x - e^{-x} + c.$$

$$9. \operatorname{tg} x - x + c. \quad 13. -\ln|x-a| + c. \quad 16. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c. \quad 18. \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c. \quad 22. \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{2} x + c.$$

$$23. \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}} + c. \quad 24. -\frac{1}{9} \cos 3x^3 + c. \quad 25. \frac{\sin^6 x}{6} + c. \quad 26. -e^{\cos x} + c. \quad 27. -\frac{1}{3 \sin^3 x} + c.$$

$$28. -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + c. \quad 29. \frac{\ln^4 x}{4} + c. \quad 30. \frac{\ln^2 x}{2} + c. \quad 32. \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x}{2} + c. \quad 34. x \ln x - x + c. \quad 41. \ln 2. \quad 42. \frac{3}{8}$$

$$43. \frac{7}{3}. \quad 44. \frac{2}{3}. \quad 47. \frac{1}{3}.$$

5. Елементи теорії диференціальних рівнянь

$$1. \frac{1}{y} + 2x + c = 0. \quad 2. y = x^6 + x + c. \quad 3. y^2 = \ln|x| + c. \quad 4. y^2 = 2 \ln|x| - x^2 + c. \quad 5. y = cx^2.$$

$$6. y = x + a \ln|x| + c. \quad 7. y = 4x - \frac{x^3}{3} + c. \quad 8. y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + c. \quad 9. y = \frac{c}{1+x}. \quad 10. x = ce^{\sin x}.$$

$$11. y = c \sin x. \quad 12. y = \frac{c}{x}. \quad 13. |1-x^2| \cdot |1-y^2| = c. \quad 15. \frac{1}{y} = \cos x + c. \quad 17. \frac{y^2}{2} = \ln|x| - x + c.$$

18. $e^y = x^4 + c$. 19. $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = c$. 20. $-\frac{1}{x} = t + \frac{t^3}{3} + c$. 22. $\ln|y| = \sqrt{2} |\sin x|$. 23. $y = \cos x + 1$.

24. $|y| = 4|x+1|$. 26. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$. 27. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. 28. $y = c_1 + c_2 e^x$. 29. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. 30. $y = e^x (c_1 \sin x + c_2 \cos x)$. 31. $y = c_1 \sin 7x + c_2 \cos 7x$. 35. $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$.

36. $y = c_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{2})x}$. 37. $y = c_1 + c_2 e^{hx}$. 38. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{2}{3}x}$. 39. $y = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x$.

40. $y = e^{-x} (c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$. 41. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$. 42. $y = x \arcsin cx$. 46. $\ln|y| = x^2 + c$.

50. $x = x_0 (1 - e^{-4t})$. 53. $y = e^{-x} + ce^{-2x}$. 54. $y = x^2 (\sin x + c)$. 55. $y = e^{-x^2} (x^2 + c)$. 56. $y = \ln x (x^3 + c)$. 59. $y = e^{-2x} (c_1 x + c_2)$. 60. $y = \frac{1}{8} e^{2x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$. 61. $y = x + 2x \operatorname{tg}(\ln|x| + c)$.

63. $y = \arccos(2\sqrt{x} + c)$. 64. $y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

6. Основні положення теорії ймовірностей

5. 0,5. 6. 0,874. 7. 0,816. 8. 0,25. 9. $\frac{3}{32}$; $\frac{5}{16}$. 11. 0,9703. 14. $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$. 15. 0,06. 16. 0,51. 17. 0,0015.

18. $m = 35$; $p = \frac{35}{42}$. 19. 0,06. 20. 0,729. 21. 0,008. 22. 0,4. 23. $n = 5$. 26. 0,78. 28. 0,47. 29. 0,9.

39. 0,2. 46. 0,18. 54. $M(X) = 2,3$; $D(X) = 2,01$. 57. а) $M(X) = \frac{1}{2}$; $D(X) = \frac{1}{12}$; б) $M(X) = 1$;

$p = \frac{1}{3}$. 61. $a = 0,5$. 63. $\frac{\pi}{2}$. 65. 0,6263. 66. 0,6826.

7. Вибірковий метод. Знаходження характеристик розподілу

3. $\bar{x} = (98 \pm 3,5) \text{ см}$. 7. а) 8,16; б) 10,7. 8. $\delta \approx 0,443$; $19,76 \leq a \leq 20,64$. 10. $\delta = 2,69$. 11. $38,5 \leq a \leq 46,2$.

12. $\delta = 2,58$. 14. $\delta \approx 1,0$; $15,8 < a \leq 17,8$. 17. (915; 985). 18. $\bar{x} = (2,84 \pm 0,02) \text{ мкм}$.

8. Статистична перевірка гіпотез

1. в) $\chi^2_0 = 3$; $\chi^2(0,05; 7) = 14,07$. Підстав для відхилення гіпотези немає. д) $\chi^2_0 = 13,93$; $\chi^2(0,05; 4) = 9,5$. Гіпотеза відхиляється.

7. $F = 1,07$; $F_{kp} = (0,01; 9; 11) = 4,63$. Допустиме використання Т-критерію для порівняння вибіркових середніх. $T = \frac{10}{\sqrt{9 \cdot 12 + 11 \cdot 10}} \sqrt{\frac{10 \cdot 12 (10 + 12 - 2)}{22}} = 7,1$; $t_{kp} = (0,01; 20) = 2,85$. Гіпотеза про рівність вибіркових середніх не приймається.

9. Елементи теорії кореляції

6. $t_1 = 0,2 \cdot 3 = 0,6$; $t_{1kp}(0,05; 9) = 2,26$.

$t_2 = 0,2 \cdot \sqrt{7} = 0,54$; $t_{2kp}(0,05; 7) = 2,36$.

$t_3 = 0,2 \cdot 5 = 1$; $t_{3kp}(0,05; 25) = 2,0$.

$t_4 = 0,2 \cdot 10 = 2$; $t_{4kp}(0,05; 100) = 1,98$.

Коефіцієнт кореляції є значущим при $n_4 = 102$ та $\alpha = 0,05$. В усіх інших випадках – ні.

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2

$$\text{Значення функції } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,49	0,1879	0,98	0,3365	1,47	0,4292
0,01	0,0040	0,50	0,1915	0,99	0,3389	1,48	0,4306
0,02	0,0080	0,51	0,1950	1,00	0,3413	1,49	0,4319
0,03	0,0120	0,52	0,1985	1,01	0,3438	1,50	0,4332
0,04	0,0160	0,53	0,2019	1,02	0,3461	1,51	0,4345
0,05	0,0199	0,54	0,2054	1,03	0,3485	1,52	0,4357
0,06	0,0239	0,55	0,2088	1,04	0,3508	1,53	0,4370
0,07	0,0279	0,56	0,2123	1,05	0,3531	1,54	0,4382
0,08	0,0319	0,57	0,2157	1,06	0,3554	1,55	0,4394
0,09	0,0359	0,58	0,2190	1,07	0,3577	1,56	0,4406
0,10	0,0398	0,59	0,2224	1,08	0,3599	1,57	0,4418
0,11	0,0438	0,60	0,2257	1,09	0,3621	1,58	0,4429
0,12	0,0478	0,61	0,2291	1,10	0,3643	1,59	0,4441
0,13	0,0517	0,62	0,2324	1,11	0,3665	1,60	0,4452
0,14	0,0557	0,63	0,2357	1,12	0,3686	1,61	0,4463
0,15	0,0596	0,64	0,2389	1,13	0,3708	1,62	0,4474
0,16	0,0636	0,65	0,2422	1,14	0,3729	1,63	0,4484
0,17	0,0675	0,66	0,2454	1,15	0,3749	1,64	0,4495
0,18	0,0714	0,67	0,2486	1,16	0,3770	1,65	0,4505
0,19	0,0753	0,68	0,2517	1,17	0,3790	1,66	0,4515
0,20	0,0793	0,69	0,2549	1,18	0,3810	1,67	0,4525
0,21	0,0832	0,70	0,2580	1,19	0,3830	1,68	0,4535
0,22	0,0871	0,71	0,2611	1,20	0,3949	1,69	0,4545
0,23	0,0910	0,72	0,2642	1,21	0,3869	1,70	0,4554
0,24	0,0948	0,73	0,2673	1,22	0,3888	1,71	0,4564
0,25	0,0987	0,74	0,2703	1,23	0,3907	1,72	0,4573
0,26	0,1026	0,75	0,2734	1,24	0,3925	1,73	0,4582
0,27	0,1064	0,76	0,2764	1,25	0,3944	1,74	0,4591
0,28	0,1103	0,77	0,2794	1,26	0,3962	1,75	0,4599
0,29	0,1141	0,78	0,2823	1,27	0,3980	1,76	0,4608
0,30	0,1179	0,79	0,2852	1,28	0,3997	1,77	0,4616
0,31	0,1217	0,80	0,2881	1,29	0,4015	1,78	0,4625
0,32	0,1255	0,81	0,2910	1,30	0,4032	1,79	0,4633
0,33	0,1293	0,82	0,2939	1,31	0,4049	1,80	0,4641
0,34	0,1331	0,83	0,2967	1,32	0,4066	1,81	0,4649
0,35	0,1368	0,84	0,2995	1,33	0,4082	1,82	0,4656
0,36	0,1406	0,85	0,3023	1,34	0,4099	1,83	0,4664
0,37	0,1443	0,86	0,3051	1,35	0,4115	1,84	0,4671
0,38	0,1480	0,87	0,3078	1,36	0,4131	1,85	0,4678
0,39	0,1517	0,88	0,3106	1,37	0,4147	1,86	0,4686
0,40	0,1554	0,89	0,3133	1,38	0,4162	1,87	0,4693
0,41	0,1591	0,90	0,3159	1,38	0,4177	1,88	0,4699
0,42	0,1628	0,91	0,3186	1,40	0,4192	1,89	0,4706
0,43	0,1664	0,92	0,3212	1,41	0,4207	1,90	0,4713
0,44	0,1700	0,93	0,3238	1,42	0,4222	1,91	0,4719
0,45	0,1736	0,94	0,3264	1,43	0,4236	1,92	0,4726
0,46	0,1772	0,94	0,3289	1,44	0,4251	1,93	0,4732
0,47	0,1808	0,96	0,3315	1,45	0,4265	1,94	0,4738
0,48	0,1844	0,97	0,3340	1,46	0,4279	1,95	0,4744

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,96	0,4750	2,22	0,4868	2,54	0,4945	2,84	0,4977
1,97	0,4756	2,24	0,4875	2,56	0,4948	2,86	0,4979
1,98	0,4761	2,26	0,4881	2,58	0,4951	2,88	0,4980
1,99	0,4767	2,28	0,4887	2,60	0,4953	2,90	0,4981
2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,62	0,4956	2,92	0,4982
2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,64	0,4959	2,94	0,4984
2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,66	0,4961	2,96	0,4985
2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,68	0,4963	2,98	0,4986
2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,70	0,4965	3,00	0,49865
2,10	0,4821	2,40	0,4918	2,72	0,4967	3,20	0,49931
2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,74	0,4969	3,40	0,49966
2,14	0,4838	2,44	0,4927	2,76	0,4971	3,60	0,499841
2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,78	0,4973	3,80	0,499928
2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,80	0,4974	4,00	0,499968
2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,82	0,4976	4,50	0,499997
		2,52	0,4941			5,00	0,500000

Таблиця 3

Значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця 4

Значення $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,221
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблиця 5

Значення χ^2 залежно від α і k

k	α		
	0,05	0,01	0,001
1	3,84	6,64	10,83
2	5,99	9,21	13,82
3	7,82	11,34	16,27
4	9,49	13,28	18,46
5	11,07	15,09	20,5
6	12,59	16,81	22,5
7	14,07	18,48	24,3
8	15,51	20,1	26,1
9	16,92	21,7	27,9
10	18,31	23,2	29,6
11	19,68	24,7	31,3
12	21,0	26,2	32,9
13	22,4	27,7	34,6
14	23,7	29,1	36,1
15	25,0	30,6	37,7
16	26,3	32,0	39,3
17	27,6	33,4	40,8
18	28,9	34,8	42,3
19	30,1	36,2	43,8
20	31,4	37,6	45,3
21	32,7	38,9	46,8
22	33,9	40,3	48,3
23	35,2	41,6	49,7
24	36,4	43,0	51,2
25	37,7	44,3	52,6
26	38,9	45,6	54,1
27	40,1	47,0	55,5
28	41,3	48,3	56,9
29	42,6	49,6	58,3
30	43,8	50,9	59,7

Таблиця 6

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,73	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
0	1,94	2,43	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,10	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,04	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
Число ступенів вільності k	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
Рівень значущості α (одностороння критична область)						

Таблиця 8

Критичні точки розподілу Коchrена
(k – число ступенів вільності, m – кількість вибірок)

m	Рівень значущості $\alpha = 0,01$						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4327	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	204*	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0,01$											
	k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,58	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	440
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0,05$											
	k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	-4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,45	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3.OC	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

<i>m</i>	Рівень значущості $\alpha = 0,05$						
	k						
1	2	3	4	5	6	7	
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	0,5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

<i>m</i>	Рівень значущості $\alpha = 0,01$						
	k						
1	2	3	4	5	6	7	
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

- Баврин И. И. Высшая математика. – М.: Просвещение, 1980.
- Вейнцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей: Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1977.
- Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1977.
- Гроссман С., Тернер Д. Математика для биологов. – М.: Высш. шк., 1983.
- Жалдак М. І. Початки теорії ймовірностей. – К.: Рад. шк., 1978.
- Іващенко-Мусатов О. С. Начала математического анализа. – М.: Наука, 1988.
- Лакин Г. Ф. Биометрия. – М.: Высш. шк., 1990.
- Лобоцька Н. Л., Мороз Ю. В., Дунаев А. А. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1987.
- Лапач С. Н., Чубенко А. В., Бабич П. Н. Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием EXCEL. – К.: Морион, 2000.
- Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. – М.: Наука, 1980.
- Медична і біологічна фізика. Т. 1 / За ред. О. В. Чалого. – К.: Віпол, 1999.
- Мінцер О. П., Угаров В. Н., Власов В. В. Методы обработки медицинской информации. – К.: Вища шк., 1982.
- Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика. У 2 ч. Ч. 1 / За ред. П. П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2000.
- Овчинников П. П. Вища математика. У 2 ч. Ч. 2. – К.: Техніка, 2000.
- Свердан П. Л. Вища математика: Аналіз інформації у математиці та медицині. – Львів: Світ, 1998.
- Чалий О. В., Стучинська Н. В., Цехмістер Я. В. Математична обробка медико-біологічної інформації. – К.: УДМУ, 1995.
- Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика. – К.: Вища шк., 1984.
- Шунда Н. М., Томусян А. А. Практикум з математичного аналізу. – К.: Вища шк., 1993.

ЗМІСТ

Передмова	3
1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКІЇ	5
1.1. Поняття про множину. Числові множини	5
1.2. Поняття про функцію. Основні елементарні функції	9
1.3. Границя функції та послідовності	15
1.4. Нескінченно малі та нескінченно великі	19
1.5. Основні теореми про граници	20
1.6. Неперервність функції	24
Приклади розв'язування задач	28
Завдання для самостійної роботи	30
2. ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ	31
2.1. Похідна та диференціал функції	31
2.2. Основні правила диференціювання	34
2.3. Таблиця похідних основних елементарних функцій	35
2.4. Правило диференціювання складеної функції	36
2.5. Похідні і диференціали вищого порядку	37
2.6. Дослідження функцій на монотонність. Екстремуми функцій	39
2.7. Опуклість та угнутість графіка функцій. Точки перегину	40
2.8. Асимптоти кривої	42
2.9. Дослідження функцій і побудова графіків	43
Приклади розв'язування задач	46
Завдання для самостійної роботи	50
3. ФУНКІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	54
3.1. Частинні похідні і частинні диференціали функції багатьох змінних	54
3.2. Повний диференціал	56
3.3. Застосування диференціалу функції для обчислення похибок	56
Приклади розв'язування задач	58
Завдання для самостійної роботи	60
4. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ	62
4.1. Первісна. Невизначений інтеграл	62
4.2. Властивості невизначеного інтеграла	63
4.3. Таблиця найпростіших інтегралів	63
4.4. Основні методи інтегрування	64
4.5. Визначений інтеграл	65
4.6. Властивості визначеного інтеграла	66
4.7. Формула Ньютона – Лейбніца	67
4.8. Деякі фізичні, біофізичні та геометричні застосування визначеного інтеграла	68
4.9. Невласний інтеграл	71
Приклади розв'язування задач	72
Завдання для самостійної роботи	76

5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	80
5.1. Поняття про диференціальні рівняння	80
5.2. Лінійні диференціальні рівняння	81
5.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку	83
5.4. Диференціальні рівняння в біології та медицині	87
5.5. Звичайні лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами	96
Приклади розв'язування задач	98
Завдання для самостійної роботи	102
6. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	104
6.1. Частота та ймовірність подій	104
6.2. Об'єднання випадкових подій	106
6.3. Перетин випадкових подій	107
6.4. Формула повної ймовірності. Формула Байєса	109
6.5. Основні формули комбінаторики	110
6.6. Повторні випробування. Формула Бернуллі	112
6.7. Випадкова величина. Дискретні та неперервні випадкові величини	112
6.8. Інтегральна та диференціальна функції розподілу	113
6.9. Основні числові характеристики розподілу випадкових величин	115
6.10. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин	118
6.11. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин	119
6.12. Ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал. Функція Лапласа	123
6.13. Деякі інші розподілі випадкових величин	125
6.14. Центральна гранична теорема	126
6.15. Локальна та інтегральна теореми Лапласа	127
6.16. Закон великих чисел Чебишова	128
Приклади розв'язування задач	129
Завдання для самостійної роботи	135
7. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД. ЗНАХОДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК РОЗПОДІЛУ	142
7.1. Предмет математичної статистики	142
7.2. Генеральна сукупність та вибірка	143
7.3. Оцінки параметрів генеральної сукупності за її вибіркою	145
7.4. Генеральна та вибіркова дисперсії. Стандарт	146
7.5. Точність та надійність оцінки. Довірчий інтервал	148
Приклади розв'язування задач	154
Завдання для самостійної роботи	156
8. СТАТИСТИЧНА ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ	158
8.1. Статистична гіпотеза та статистичний критерій. Критична область	158
8.2. Порівняння дисперсій нормально розподілених величин	159
8.3. Порівняння виправленої вибіркової дисперсії з гіпотетичною генеральною дисперсією нормальної сукупності	160
8.4. Порівняння вибіркових середніх двох нормально розподілених сукупностей	162
8.5. Порівняння середніх двох нормально розподілених сукупностей, дисперсії яких невідомі	164
8.6. Перевірка гіпотези про рівність генеральних дисперсій декількох нормально розподілених сукупностей	166

8.7. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.	
Критерій згоди Пірсона	167
Приклад розв'язування задач	168
Завдання для самостійної роботи	169
9. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЙ КОРЕЛЯЦІЇ	172
9.1. Кореляційна та статистична залежності	172
9.2. Лінійна кореляція	173
9.3. Розрахунок прямих регресії	175
9.4. Перевірка значущості вибіркового коефіцієнта кореляції	177
9.5. Метод найменших квадратів	178
Приклад розв'язування задач	180
Завдання для самостійної роботи	182
10. ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ	183
Приклад розв'язування задач	185
Завдання для самостійної роботи	186
Відповіді до завдань для самостійної роботи	187
Додатки	191
Список рекомендованої літератури	199

Навчальне видання

Чалий Олександр Васильович
Стучинська Наталя Василівна
Меленєвська Алла Вікторівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Редактор *Л. В. Магда*
Художнє оформлення *В. О. Гурлєва*
Художній редактор *С. В. Анисенков*
Комп'ютерна верстка *Г. Г. Пузиренка*

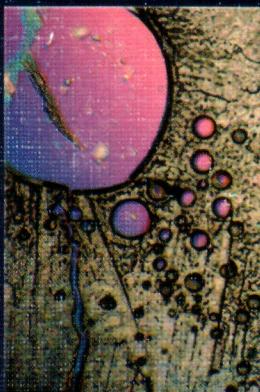
ДЛЯ НОТАТОК

Підписано до друку 21.11.2001. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 12,09. Обл.-вид. арк. 13,2.
Тираж 1000 прим. Зам. №1-213.

Видавництво “Техніка”. 04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру України
суб’єктів видавничої справи ДК № 357 від 12.03.2001 р.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці
09117 м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4

ВИЩА МАТЕМАТИКА



О.В.Чалий
Н.В.Стучинська
А.В.Меленевська

*Навчальний посібник
для студентів
вищих медичних
і фармацевтичних
навчальних закладів*

математика

ВИША МАТЕМАТИКА



математика